Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 15 octobre 2015

EXERCICE 1

Voir le cours **(2 points)**

EXERCICE 2

Récurrence **(5 points)**

a) **Initialisation :** Pour $n = 0$, $5^0 + 2 = 1 + 2 = 3 = u_0$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : On admet que $u_n = 5^n + 2$, montrons que $u_{n+1} = 5^{n+1} + 2$
On sait que $u_{n+1} = 5u_n - 8$
d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = 5^n + 2$, en remplaçant on a :
$u_{n+1} = 5(5^n + 2) - 8 = 5 \times 5^n + 10 - 8 = 5^{n+1} + 2$
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^n + 2$

b) **Initialisation :** Pour $n = 0$, $v_0 = 10$ donc $3 \leqslant v_0 \leqslant 10$
La proposition est initialisée.

Hérédité : On admet que : $3 \leqslant v_n \leqslant 10$, montrons que $3 \leqslant v_{n+1} \leqslant 10$
D'après l'hypothèse de récurrence : $3 \leqslant v_n \leqslant 10$
On ajoute 6 : $9 \leqslant v_n + 6 \leqslant 16$
La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :
$\sqrt{9} \leqslant \sqrt{v_n + 6} \leqslant \sqrt{16} \Leftrightarrow 3 \leqslant v_{n+1} \leqslant 4 \leqslant 10$
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \leqslant v_n \leqslant 10$

EXERCICE 3

Limites de suites **(4 points)**

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \dfrac{3n^2 - n}{1 - n^2} = \dfrac{n^2\left(3 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)} = \dfrac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - 1}$ soit $\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} 3 - \frac{1}{n} = 3 \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = -1 \end{aligned}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$

b) $\cos n \leqslant 1 \Leftrightarrow 2\cos n \leqslant 2 \Leftrightarrow 2\cos n - n^2 \leqslant 2 - n^2$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - n^2 = -\infty$ par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

c) $u_n = 5n + 1 - \dfrac{n}{n^2+1} = 5n + 1 - \dfrac{n}{n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)} = 5n + 1 - \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + \dfrac{1}{n} = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{n}} = 0$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n + 1 = +\infty$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

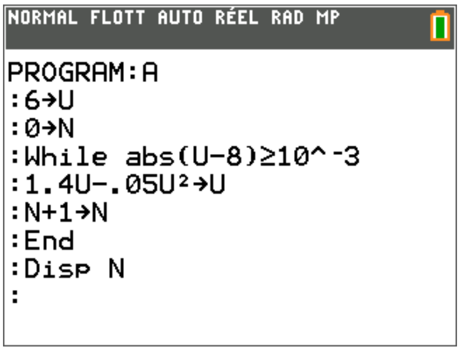
d) $u_n = 3^n - 7^n = 7^n\left(\dfrac{3^n}{7^n} - 1\right) = 7^n\left[\left(\dfrac{3}{7}\right)^n - 1\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{7}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3}{7} < 1$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{7}\right)^n - 1 = -1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$ car $7 > 1$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

EXERCICE 4

Algorithme **(3 points)**



Variables : N : entier U : réel
Entrées et initialisation
  $6 \to U$
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $|U - 8| \geqslant 10^{-3}$ **faire**
    $1,4U - 0,05U^2 \to U$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

On trouve alors $n = 16$

EXERCICE 5

Conjecture **(4 points)**

1) a) $u_1 = u_0 + 2\times1 = 0+2 = 2$, $u_2 = u_1 + 2\times2 = 2+4 = 6$, $u_3 = u_2 + 2\times3 = 6+6 = 12$
$u_4 = u_3 + 2\times4 = 12 + 8 = 20$, $u_5 = u_4 + 2\times5 = 20 + 10 = 30$

b) La suite n'est ni arithmétique ni géométrique. En effet :

$u_1 - u_0 = 2 - 0 = 2$ et $u_2 - u_1 = 6 - 2 = 4$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{12}{6} = 2$ donc $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

c) $0\times1 = 0 = u_0$, $1\times2 = 2 = u_1$, $2\times3 = 6 = u_2$, $3\times4 = 12 = u_3$, $4\times5 = 20 = u_4$, $5\times6 = 30 = u_5$.

La conjecture est donc justifiée.

2) a) On a :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:B
:Prompt N
:0→U
:For(I,1,N)
:U+2I→U
:End
:Disp U
:
```

Variables : N, I entiers U réels
Entrées et initialisation
  Lire N
  $0 \rightarrow U$
Traitement
  pour I de 1 à N **faire**
    $U + 2I \rightarrow U$
  fin
Sorties : Afficher U

b)

n	10	20	50	85
u_n	110	420	2550	7310

c) $10 \times 11 = 110 = u_{10}$, $20 \times 21 = 420 = u_{20}$, $50 \times 51 = 2550 = u_{50}$, $85 \times 86 = 7310 = u_{83}$

La conjecture est donc toujours vérifiées

Exercice 6

Vrai-Faux **(2 points)**

a) **Faux.** Une suite peut-être majorée sans pour autant converger.

Contre-exemple : soit la suite (u_n) telle que : $u_n = -2^n$

On a bien, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-2^n \leqslant 0 \Rightarrow u_n \leqslant 0$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2^n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

La suite (u_n) diverge vers $-\infty$

b) **Vrai.** C'est le théorème de comparaison.

En effet $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{4} = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$