Correction devoir du 02 novembre 2015

Exercice I

Suite et limite **(5,5 points)**

1) a) $u_1 = 0,5 \times 5 + 0,5 \times 0 - 1,5 = 1, \quad u_2 = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 - 1,5 = -0,5,$
$u_3 = 0,5(-0,5) + 0.5 \times 2 - 1,5 = -0,75, \quad u_4 = 0,5(-0,75) + 0,5 \times 3 - 1,5 = -0,375$

b) On ne peut pas affirmer que la suite est décroissante car u_0, u_1, u_2, u_3 sont effectivement décroissants mais u_3 et u_4 sont croissants.

2) **Initialisation :** $n = 3$, on a $u_3 = -0,75$ et $u_4 = -0,375$ donc $u_4 > u_3$. La proposition est initialisée.
Hérédité : On admet que $u_{n+1} > u_n$, montrons que $u_{n+2} > u_{n+1}$

Par hypothèse, on a : $u_{n+1} > u_n$

$$\begin{aligned} 0,5u_{n+1} &> 0,5u_n \\ 0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 &> 0,5u_n + 0,5(n+1) - 1,5 \\ u_{n+2} &> 0,5u_n + 0,5n + 0,5 - 1,5 \\ u_{n+2} &> u_{n+1} + 0,5 \quad \Rightarrow \quad u_{n+2} > u_{n+1} \end{aligned}$$

La proposition est héréditaire.
Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$

On peut donc en déduire qu'à partir du rang 3 la suite est croissante. On ne peut pas toujours détecter les variations d'une suite à partir des premiers termes comme c'était le cas dans la question 2) b)

3) a) $$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 \\ &= 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n - 0,1 + 0,5 \\ &= 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 \\ &= 0,05u_n - 0,05n + 0,25 \\ &= 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,5,$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = 0,1u_0 + 0,5 = 1$

b) On a donc $v_n = v_0 q^n = (0,5)^n$, de $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$, on en déduit :
$0,1u_n = v_n + 0,1n + 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad u_n = 10v_n + n + 5$ donc $u_n = 10(0,5)^n + n - 5$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 5 = +\infty$
par produit et somme, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice II

Algorithme **(2,5 points)**

1) ⚠ au coefficient n dans la relation de récurrence et au premier terme u_1.

Variables : N, I entiers U réels
Entrées et initialisation
    Lire N
    $\frac{1}{2} \to U$
Traitement
    pour I de 2 à N **faire**
        $\frac{I}{2(I-1)}U + 1 \to U$
    fin
Sorties : Afficher U

2)

n	2	3	10	50	100	500
u_n	1,500	2,125	2,308	2,043	2,021	2,004

3) On peut faire comme conjecture que la suite converge vers 2

Exercice III

Dérivée **(5 points)**

1) a) On dérive avec $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad f'(x) = -3x^2 + \frac{5}{2}x - 2$

b) On dérive avec $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$g'(x) = \frac{x^2 + 5 - 2x(x-4)}{(x^2+5)^2} = \frac{x^2 + 5 - 2x^2 + 8x}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2 + 8x + 5}{(x^2+5)^2}$$

c) On dérive avec $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$$h'(x) = \frac{-2 \times 5(-1)(2-x)^4}{(2-x)^{10}} = \frac{10}{(2-x)^6}$$

2) a) Pour dériver la fonction f, elle doit être non nulle donc $D_{f'} = \left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$

b) On dérive avec $(uv)' = u'v + uv'$ et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

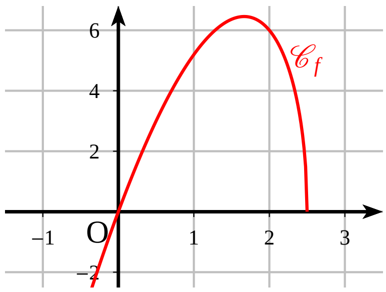
$$f'(x) = 3\sqrt{-2x+5} + 3x\frac{-2}{2\sqrt{-2x+5}} = 3\sqrt{-2x+5} - \frac{3x}{\sqrt{-2x+5}}$$

$$= \frac{3(-2x+5) - 3x}{\sqrt{-2x+5}} = \frac{-6x + 15 - 3x}{\sqrt{-2x+5}} = \frac{-9x+15}{\sqrt{-2x+5}} = \frac{-3(3x-5)}{\sqrt{-2x+5}}$$

c) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3}$

signe de $f'(x)$ = signe de $-3(3x-5)$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 6{,}45$	$\searrow$	0



Exercice IV

Reconnaître une courbe (2 points)

D'après la courbe $\mathscr{C}_f$, la fonction f est croissante sur $]0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$. En conséquence la fonction dérivée est positive sur $]0\,;\,1]$ et négative sur $[1\,;+\infty[$. Seule la **courbe nº 1** possède cette caractéristique.

En effet la courbe nº 2 représente une fonction positive ou nulle et la courbe nº 3 représente une fonction négative sur $]0\,;\,1]$ et positive sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice V

Étude d'une fonction (5 points)

1) Limites en $-\infty$ et $+\infty$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+\dfrac{1}{x}} \quad \text{simplification par } x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x + \dfrac{1}{x} = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0\end{array} \qquad \text{de même} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$ d'équation $y = 0$ (axe des abscisses)

2) $$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

3) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \;\text{ ou }\; x = -1$

signe de $f'(x)$ = signe de $1 - x^2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4) $f'(x) = 2$ et $f(0) = 0$ donc $T_0 :\; y = 2x$

5) On obtient la courbe suivante :