BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

OBLIGATOIRE ET SPÉ

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = 150 + 100 = 250$

$a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = 150 + 2250 + 770 = 445$

2) a) On obtient en sortie : $d_1 = 250$ et $a_1 = 420$.

d_1 est conforme à la question 1) mais pas a_1.

Cela vient du fait qu'à la ligne $\frac{D}{2} + 100 \to D$, on a écrasé l'ancienne valeur de D et l'on a calculé A avec la nouvelle valeur de D.

On a donc calculé : $a_1 = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = 125 + 225 + 70 = 420$

b) Pour remédier à cela, soit on calcule la valeur de A avant la valeur de D, soit on stocke l'ancienne valeur de D dans une variable E, comme le montre les algorithmes corrigés suivants :

Variables : n, k : entiers naturels
D, A : réels
Entrées et initialisation
Saisir la valeur de n
D prend la valeur 300
A prend la valeur 450
Traitement
pour k variant de 1 à n **faire**
A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$
D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
fin
Sorties : Afficher D et A

Variables : n, k : entiers naturels
D, A, E : réels
Entrées et initialisation
Saisir la valeur de n
D prend la valeur 300
A prend la valeur 450
Traitement
pour k variant de 1 à n **faire**
E prend la valeur D
D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{E}{2} + 70$
fin
Sorties : Afficher D et A

3) a) $e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n + 100 - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) = \frac{1}{2}e_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{1}{2}$, donc la suite (e_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme

$e_0 = d_0 - 200 = 100$

b) On a $e_n = e_0 q^n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$d_n = e_n + 200 = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

donc par produit et somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200$. La suite (d_n) converge vers 200.

4) a) On a les inégalité suivantes :

$n \geqslant 3$ on multiplie par n

$n^2 \geqslant 3n$ on ajoute n^2

$2n^2 \geqslant n^2 + 3n$ or $3n \geqslant 2n + 1$

$2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 \geqslant (n+1)^2$

b) Soit la proposition : $2^n \geqslant n^2$.

- **Initialisation :** Pour $n = 4$. $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$ la proposition est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 4$. On admet que $2^n \geqslant n^2$. Montrons que $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

  On a la suite des inégalités suivantes :

  $2^n \geqslant n^2$ hypothèse de récurrence. On multiplie par 2

  $2 \times 2^n \geqslant 2n^2$ on sait que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$ (question 4) a))

  $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$

  La proposition est héréditaire.
- **Conclusion :** Par initialisation et hérédité, $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.

c) D'après la question précédente, pour $n \geqslant 4$, on a : $2^n \geqslant n^2$

Comme les termes sont positifs, en prenant l'inverse, on a :

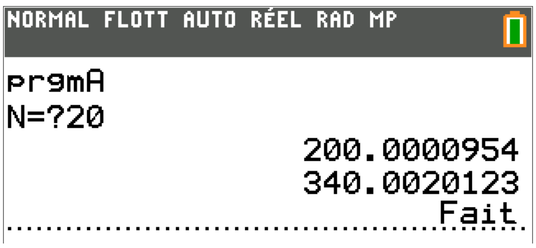
$$0 \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{100n}{2^n} \leqslant \frac{100n}{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{100n}{2^n} \leqslant \frac{100}{n}$$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{100}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{100n}{2^n} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$.

Par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 340$. La suite (a_n) est convergente vers 340.

PS : voici les valeurs que donne la calculatrice pour $n = 20$



EXERCICE 2 (5 points)

Partie A : Propriétés du nombre *j*

1) a) $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. $\Delta < 0$, 2 racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) On a bien $z_1 = j$

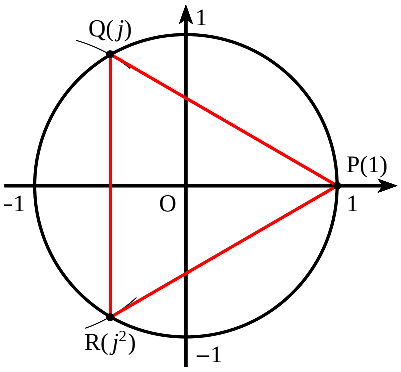
2) $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

On a donc : $|j| = 1$ et $\arg(j) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

3) a) $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\,2\pi} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$;

b) j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ donc $j^2 + j + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad j^2 = -1 - j$

4) On a la figure suivante :



$$PQ = |j-1| = \left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{9+3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$QR = |j^2-j| = \left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$RP = |1-j^2| = \left|1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{9+3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Donc $PQ = QR = RP = \sqrt{3}$, le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

1) Comme $j^2 = -1-j$, on a :

$a+jb+j^2c = 0 \Leftrightarrow a+bj+c(-1-j) = 0 \Leftrightarrow a+bj-c-cj = 0 \Leftrightarrow a-c = cj-bj \Leftrightarrow$
$a-c = j(c-b)$

2) À l'aide de la question précédente et comme $|j| = 1$, on a :

$AC = CA = |a-c| = |j(c-b)| = |j| \times |c-b| = |c-b| = BC$

3) Comme $j^2 = -1-j \Leftrightarrow j = -1-j^2$, on a :

$a+jb+j^2c = 0 \Leftrightarrow a+b(-1-j^2)+cj^2 = 0 \Leftrightarrow a-b-bj^2+cj^2 = 0 \Leftrightarrow$
$a-b = bj^2-cj^2 \Leftrightarrow a-b = j^2(b-c)$

4) À l'aide de la question précédente et comme $|j^2| = 1$, on a :

$AB = BA = |a-b| = |j^2(b-c)| = |j^2| \times |b-c| = |b-c| = CB = BC$

Des question 2) et 4), on a : $AC = BC = AB$. Le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1) • En zéro :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 1+x = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par somme}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1\end{array}$$

- En $+\infty$: $g(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{x} - \ln x\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 1 - \ln x = -\infty \end{array}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) a) $g'(x) = 1 - \ln x - x\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

- $g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$
- Comme la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$, la fonction $-\ln$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc :

  Si $x < 1$, $g'(x) > 0$ et si $x > 1$, $g'(x) < 0$.

b) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$			
$g(x)$	‖ 1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

3) a) Sur $]0\,;\,1[$, $g(x) > 1$ donc ne s'annule pas.

Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction g :
- est continue car dérivable ;
- est monotone (décroissante) ;
- change de signe car $g(1) = 2$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet une unique solution $\alpha \in [1\,;+\infty[$

Conclusion : sur $]0\,;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) $g(4) = 1 + 4 - 4\ln 4 \approx -0,55$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in [1\,;\,4]$

À l'aide de l'algorithme de dichotomie, on trouve : $3,59 \leqslant \alpha \leqslant 3,60$

c) D'après le tableau de variation :
Si $0 < x < \alpha$, $g(x) > 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) < 0$.

Partie B : Étude de la fonction principale

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x) - 1 \times \ln x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1 + x - x\ln x}{(1+x)^2} = \dfrac{g(x)}{x(1+x)^2}$

b) Si $x > 0$, alors $x(1+x)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$.

c) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\alpha}$	$\searrow$	0

d) $g(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \alpha - \alpha \ln \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \alpha = \alpha \ln \alpha.$

En remplaçant dans $f(\alpha)$, on obtient : $f(\alpha) = \dfrac{\ln \alpha}{1+\alpha} = \dfrac{\ln \alpha}{\alpha \ln \alpha} = \dfrac{1}{\alpha}.$

$3,59 \leqslant \alpha \leqslant 3,60 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3,60} \leqslant \dfrac{1}{\alpha} \leqslant \dfrac{1}{3,59} \quad \Rightarrow \quad 0,27 \leqslant f(\alpha) \leqslant 0,28$

EXERCICE 4 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude et représentation de la fonction *f*

1) On change la forme : $f(x) = \dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

2) $f'(x) = \dfrac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$

Comme $\forall x \in [0\,;+\infty[,\ e^x > 0$, on a :

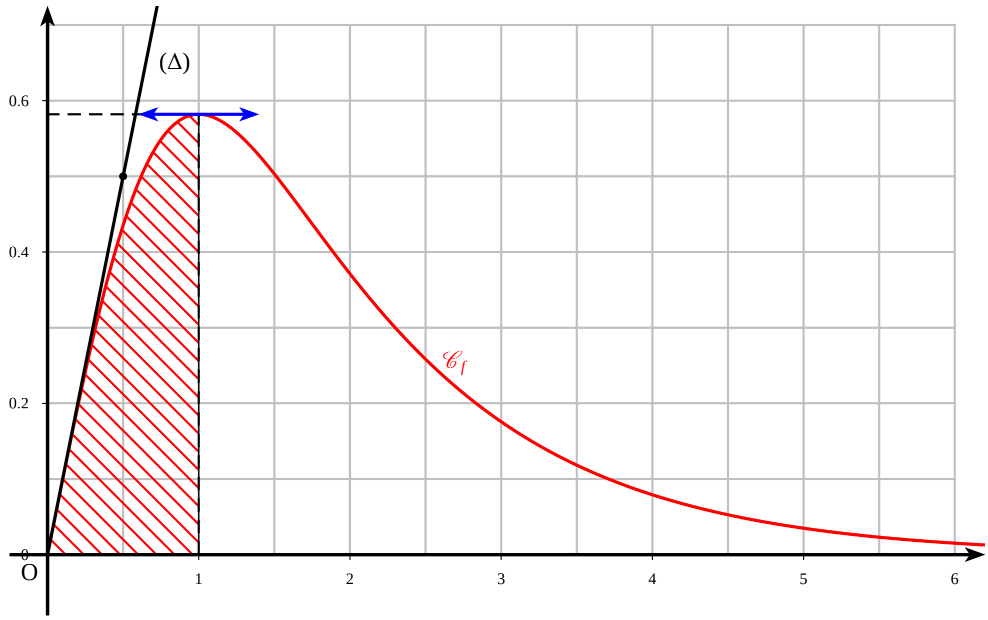
- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$
- signe de $f'(x)$ = signe de $(1-x)$.
  Si $0 \leqslant x < 1$, $f'(x) > 0$ et si $x > 1$, $f'(x) < 0$.

3) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4) (Δ) : $y = f'(0)x + f(0)$ comme $f'(0) = 1$ et $f(x) = 0$, on a : (Δ) : $y = x$

5) On obtient la courbe suivante : $\dfrac{1}{e-1} \approx 0,58$



Partie B : Algorithme

1) Pour éviter de calculer les valeurs de A, on peut mettre l'instruction "Afficher A" avant la fin de la boucle. On obtient alors

I	A	X
1	0	0,25
2	0,060	0,50
3	0,169	0,75
4	0, 306	1

2) Cet algorithme pour $K = 8$, affiche : $A \approx 0,347$

3) L'algorithme donne la somme des aires des rectangles qui minorent la surface sous la courbe $\mathscr{C}_f$ dans l'intervalle $[0\,;\,1]$. Lorsque K tend vers $+\infty$, l'algorithme donne donc l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ comme indiqué.

EXERCICE 5 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) Il s'agit de démontrer le corollaire du théorème de Gauss.
b et c divise a, donc il existe deux entiers relatifs k et k' tels que : $a = kb$ et $a = k'c$

On a donc : $kb = k'c$ donc c divise kb. Comme b et c sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, c divise k. Il existe un entier relatif k'' tel que : $k = k''c$

On a donc : $a = kb = k''cb$, en conséquence bc divise a.

2) a) Si 3 et 4 divise $2^{33} - 1$, donc comme 3 et 4 sont premiers entre eux, d'après le théorème précédent $3 \times 4 = 12$ divise $2^{33} - 1$. Cela contredit donc l'affirmation de l'élève.

b) 2^{33} est pair, donc $2^{33} - 1$ est impair en conséquence 4 ne divise par $2^{33} - 1$.

c) $2 \equiv -1\ [3]$, comme la congruence est compatible avec les puissances :

$$2^{33} \equiv (-1)^{33} \equiv -1\ [3].$$

On en déduit, $2^{33} - 1 \equiv -2 \equiv 1\ [3]$. En conséquence 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d) $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \cdots + (2^3)^{10}$. Il y a 11 termes.

S est la somme des 11 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 2^3$ et de premier terme 1.

$$S = \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{1-(2^3)^{11}}{1-2^3} = \frac{1-2^{33}}{-7} = \frac{2^{33}-1}{7}.$$

e) On en déduit que : $2^{33} - 1 = 7S$. 7 divise $2^{33} - 1$.

3) $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$.

Pour savoir si 127 est premier, on applique le critère d'arrêt ou de primalité. On teste tous les diviseurs premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{127} \approx 11,27$.

On teste les diviseurs : 2, 3, 5, 7 et 11.

D'après les critères de divisibilité : 2, 3, 5 et 11 ne divisent pas 127. De plus $127 = 7 \times 18 + 4$

2, 3, 5, 7 et 11 ne divisent pas 127 donc 127 est un nombre premier.

4) a)
- L'algorithme affiche 7 et "CAS 2" si on saisit $n = 33$ et
- 12 et "CAS 1" si on saisit $n = 7$ car on teste les facteurs premiers jusqu'à 11.

b) Le CAS 2 correspond à un nombre de Mersenne non premier, car il existe un k qui divise $2^n - 1$ inférieur à $\sqrt{2^n - 1}$. $k = 7$ pour $2^{33} - 1$.

c) Le CAS 1 correspond à un nombre de Mersenne premier comme $2^7 - 1$.