Contrôle de mathématiques

Mardi 11 octobre 2016

EXERCICE 1

ROC **(1 points)**

On donne l'inégalité de Bernoulli : soit un réel $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, diverge vers $+\infty$

EXERCICE 2

Récurrence **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n}$

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

   b) Si la suite (u_n) converge, Que peut-on dire de sa limite ?

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$. On admet que la suite (u_n) converge vers ℓ telle que $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ.

EXERCICE 3

Limites de suites **(4 points)**

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \dfrac{n^2+2}{n+1}$

b) $u_n = 3 + \dfrac{\cos n}{n+1}$

c) $u_n = 3n - 1 - \dfrac{n+3}{1-2n}$

d) $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}$

EXERCICE 4

Somme de termes **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

a) Calculer les termes u_1, u_2, u_3.
Pour les termes u_2 et u_3, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

b) Compléter l'algorithme suivant qui calcule u_n en fonction de n.

On donne le tableau suivant pour certaines valeurs de n

n	10	50	100	1 000	10 000
u_n	0,819	0,914	0938	0,979	0,993

Variables : N, I entiers U réel
Entrées et initialisation
  Lire N
  $0 \to U$
Traitement
  pour I de .... à N **faire**
    .... $\to U$
  fin
Sorties : Afficher U

Conjecturer la monotonie de la suite et sa convergence.

c) Montrer que, pour i avec $1 \leqslant i \leqslant n$, on a : $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{i}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

d) En déduire que la suite converge et calculer sa limite.

EXERCICE 5

Étude d'une suite **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1$

1) Déterminer les termes : u_1, u_2, u_3.
2) On pose $v_n = u_n - 4n + 10$
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3) On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

   Montrer que : $S_n = 22\left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)(2n-10)$

EXERCICE 6

Vrai-Faux **(2 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par Vrai ou Faux et justifier votre réponse.

a) Soit une suite (u_n) définie et croissante sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a : $u_n < 100$.

   Affirmation 1 : On ne peut rien en déduire sur la convergence de la suite (u_n)

b) Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1\,024$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n} - 1$

   Affirmation 2 : La suite (v_n) n'est pas définie sur $\mathbb{N}$.