Correction contrôle de mathématiques

du jeudi 26 janvier 2017

EXERCICE 1

Triangle **(6 points)**

1) Cf figure ci-après.

2) a) $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-1+7i-2-i}{6+3i-2-i} = \dfrac{-3+6i}{4+2i} = \dfrac{(-3+6i)(4-2i)}{4^2+2^2}$

$= \dfrac{-12+6i+24i+12}{20} = \dfrac{30i}{20} = \dfrac{3}{2}i$

b) $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{3}{2}i\right) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

3) a) $|z-2-i| = |z-6-3i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow \text{AM} = \text{BM}$

M se trouve donc sur la médiatrice du segment [AB].
L'ensemble (Δ) des points M est donc la médiatrice du segment [AB].

b) Calculons les coordonnées du milieu I de [BC].

$z_I = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{6+3i-1+7i}{2} = \dfrac{5+10i}{2} = \dfrac{5}{2} + 5i = z_E$

Donc I = E, le point E est alors le milieu de [BC].

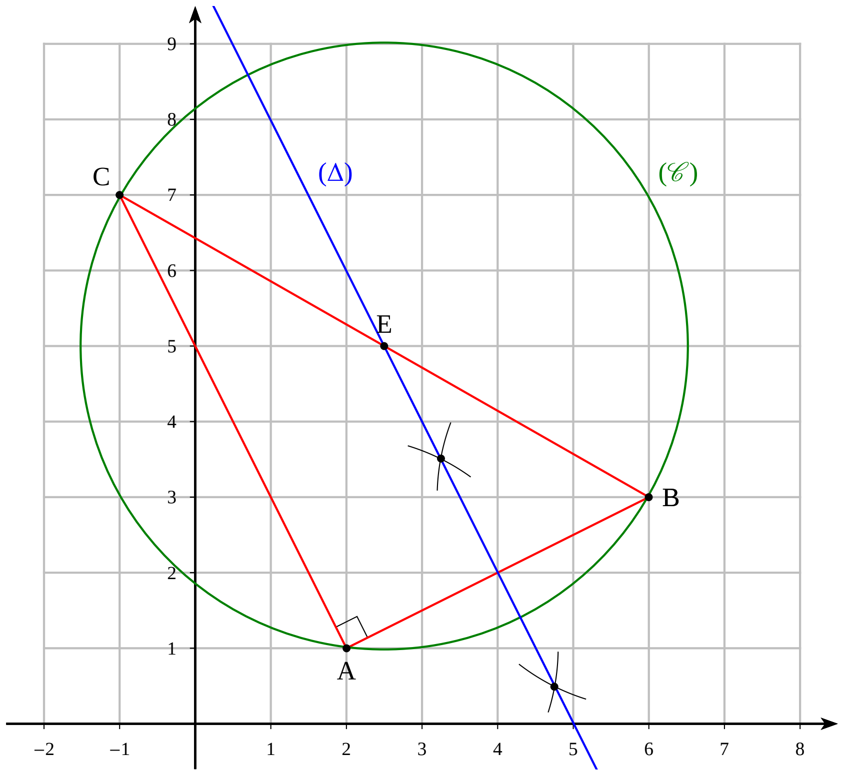
4) a) $\text{EB} = |z_B - z_E| = \left|6+3i-\dfrac{5}{2}-5i\right| = \left|\dfrac{7}{2}-2i\right| = \sqrt{\dfrac{49}{4}+4} = \sqrt{\dfrac{49+16}{4}} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

b) $|z-z_E| = \dfrac{\sqrt{65}}{2} \Leftrightarrow \text{EM} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

Le point M se trouve sur le cercle de centre E et de rayon $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

L'ensemble $\mathscr{C}$ des point M est donc le cercle de centre E et de rayon $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.

c) Dans un triangle rectangle le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de l'hypoténuse. Le point E est le milieu de l'hypoténuse [BC] et le rayon de $(\mathscr{C})$ est égal à la distance EB. $(\mathscr{C})$ est donc le cercle circonscrit au triangle ABC, il passe donc par les points A, B et C.



Exercice 2

Fonction complexe **(3 points)**

1) $|f(z)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\dfrac{iz}{z-2}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|i| \times |z|}{|z-2|} = 1$ comme $|i| = 1$

$|z| = |z-2| \quad \Leftrightarrow \quad \text{OM} = \text{AM}$

L'ensemble (E) des points M est donc la médiatrice du segment [OA]. Comme O et A sont sur l'axes des réels, l'ensemble (E) est donc perpendiculaire à l'axes des réels et donc parallèle à l'axe des imaginaires.

2) $f(z)$ est un imaginaire pur si, et seulement si, $f(z) + \overline{f(z)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = -\overline{f(z)}$

$\dfrac{i\,z}{z-2} = -\dfrac{-i\,\bar{z}}{\bar{z}-2} \quad \Leftrightarrow \quad i\,z(\bar{z}-2) = i\,\bar{z}(z-2) \quad \Leftrightarrow \quad i\,z\bar{z} - 2i\,z = i\,\bar{z}z - 2i\,\bar{z} \quad \Leftrightarrow$

$2i\,(z-\bar{z}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2i\,\text{Im}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(z) = 0$

$f(z)$ est un imaginaire pur si, et seulement si, z est un réel.

Exercice 3

Forme exponentielle **(3 points)**

1) a) $|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$ et $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{5\pi}{6} \ [2\pi].$

La forme exponentielle de z est donc : $2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b) $z^4 = (-\sqrt{3}+i)^4 = \left(2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^4 = 2^4\,e^{i\frac{20\pi}{6}}$ or $\dfrac{20\pi}{6} = \dfrac{10\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $z^4 = 16\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 16\left(\cos -\dfrac{2\pi}{3} + i\sin -\dfrac{2\pi}{3}\right) = -8-8\sqrt{3}\,i$

2) $\Delta = 16-100 = -36 = (6i)^2$. On a $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées.

$$z_1 = \frac{8+6i}{2} = 4+3i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{8-6i}{2} = 4-3i$$

Exercice 4

Bac **(8 points)**

1) a) $\left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{1+\dfrac{3}{9}} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

La forme exponentielle est donc $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $z_1 = 1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{4}{3}\,e^{i\frac{2\pi}{6}} = \dfrac{4}{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) a) (z_n) est une suite géométrique dans $\mathbb{C}$. La formule est hors programme.

On démontre alors la propriété $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ par récurrence.

- **Initialisation :** $n=0$, on a $z_0 = 0$ et $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{i\times 0\times\frac{\pi}{6}} = 1$.

  La propriété est initialisée.

- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$

  montrons que $z_{n+1} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$

  $z_{n+1} = \left(1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}$.

  La propriété est héréditaire.

- Par initialisation et hérédité : $\forall n\in\mathbb{N},\ z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$

b) Les points O, A_0 d'affixe $z_0 = 1$ sont sur l'axes des réels. Pour que O, A_0 et A_n soient alignés, il faut que A_n soit aussi sur l'axe des réels. L'affixe z_n de A_n doit être réel, donc son argument doit être égal à $k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$.

$n\times\dfrac{\pi}{6} = k\pi \quad\Leftrightarrow\quad n = 6k.$

Les point O, A_0 et A_n sont alignés si n est un multiple de 6.

3) a) $d_n = |z_{n+1} - z_n| = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.
d_n représente la distance entre les points A_n et A_{n+1}.

b) $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c) On écrit la relation à l'ordre $(n+2)$, $z_{n+2} = \left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n+1}$, que l'on soustrait à la relation à l'ordre n.

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$$

d) $d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}d_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, La suite (d_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et de premier terme $d_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

On a alors $d_n = d_0 \times q^n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4) a) D'après les questions précédentes, pour tout n :

$$|z_n| = \left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times \left|e^{in\frac{\pi}{6}}\right| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \text{ donc } |z_n|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}.$$

De même $|z_{n+1}| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$ donc

$$|z_{n+1}|^2 = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \text{ donc } d_n^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = |z_{n+1}|^2$$

b) On traduit cette égalité en géométrie : $\mathrm{OA}_{n+1}^2 = \mathrm{OA}_n^2 + \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n

En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n.

c) Cf figure.

d) Deux possibilités de construction :

- Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 donc le points A_5 est sur la droite d perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4. On trace d comme la médiatrice d'un segment dont le milieu est A_4.
  De plus z_5 a pour argument $\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}$, on trace alors la droite d' faisant un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ avec l'axe des ordonnées.
  Le point A_5 est donc l'intersection des deux droites d et d'.
- Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 donc le points A_5 est sur la droite d perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4.
  De plus le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_5 donc A_5 est sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA_6]$.
  Le point A_5 est donc l'intersection de d et de $\mathscr{C}$.