Correction contrôle de mathématiques
du mardi 14 mars 2017

EXERCICE 1

Primitive et intégrale **(5 points)**

1) a) $f(x) = 2x-1+\dfrac{1}{3x+2} = 2x-1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{3x+2} = 2x-1+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = 3x+2$

$\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, comme $u > 0$ sur I, $F(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{3}\ln(3x+2)$

b) $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\,e^{2x}}{1+e^{2x}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+e^{2x}$

$\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$, comme $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$

c) $h(x) = \dfrac{-3}{(2x+1)^2} = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{(2x+1)^2} = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$, avec $u(x) = 2x+1$

$\displaystyle\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}$, $F(x) = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{-1}{2x+1} = \dfrac{3}{2(2x+1)}$

2) a) $F(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 5x - e^{-x}$.

b) $$\mathrm{I} = \int_0^2 (3x^2 + x - 5 + e^{-x})\,dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x - e^{-x}\right]_0^2 = \left(8+2-10-e^{-2}\right)+1$$
$$= 1 - e^{-2}$$

EXERCICE 2

Intégrale **(3 points)**

1) $f(x) = x\,e^{1-x^2} = -\dfrac{1}{2}\left(-2x\,e^{1-x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}u'(x)\,e^{u(x)}$, avec $u(x) = 1-x^2$

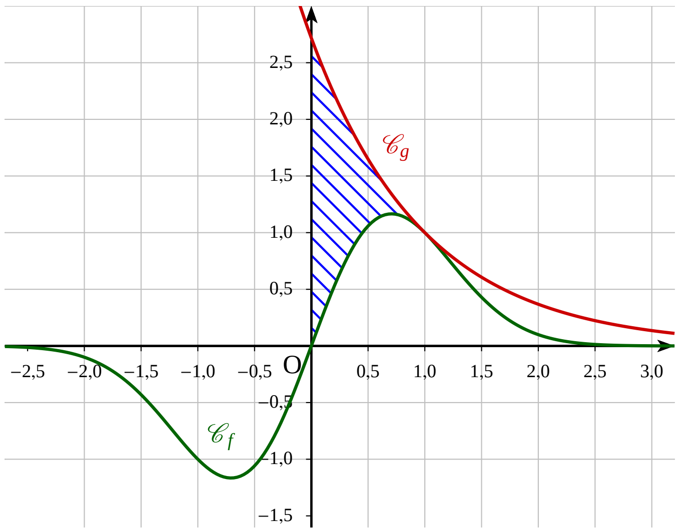
$\displaystyle\int u'\,e^u = e^u$, donc $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,e^{1-x^2}$.

$g(x) = e^{1-x} = -(-e^{1-x} = -u'(x)\,e^{1-x}$, avec $u(x) = 1-x$.

$\displaystyle\int u'\,e^u = e^u$, donc $G(x) = -e^{1-x}$.

2) $$\int_0^1 \left(e^{1-x} - x\,e^{1-x^2}\right)dx = \left[-e^{1-x} + \frac{1}{2}\,e^{1-x^2}\right]_0^1 = \left(-1+\frac{1}{2}\right) - \left(-e+\frac{1}{2}\,e\right) = \frac{1}{2}(e-1).$$

3) Ce résultat correspond à l'aire délimitée par les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$, et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$.



Exercice 3

ROC **(2 points)**

1) Deux événements A et B sont indépendant si, et seulement si, $p(\text{A} \cap \text{B}) = p(\text{A}) \times p(\text{B})$.

2) $p(\text{B}) = p(\text{A} \cap \text{B}) + p(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$ probabilité totale.

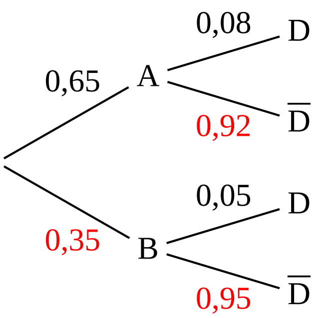
A et B sont indépendants $p(\text{B}) = p(\text{A}) \times p(\text{B}) + p(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) \Leftrightarrow$
$p(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = p(\text{B}) - p(\text{A}) \times p(\text{B}) = p(\text{B})\,[1 - p(\text{A})] = p(\text{B})p(\overline{\text{A}})$.

Les événements $\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants.

Exercice 4

Ampoules **(6 points)**

1) a) $p(\text{A}) = 0,65$, $p_{\text{A}}(\text{D}) = 0,08$ et $p_{\text{B}}(\text{D}) = 0,05$. On obtient l'arbre suivant :



b) $p(\text{B} \cap \overline{\text{D}}) = p(\text{B}) \times p_{\text{B}}(\overline{\text{D}}) = 0,35 \times 0,95 = 0,3325$.

c) $p(\overline{\text{D}}) = p(\text{A} \cap \overline{\text{D}}) + p(\text{B} \cap \overline{\text{D}}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\overline{\text{D}}) + p(\text{B} \cap \overline{\text{D}})$
$= 0,65 \times 0,92 + 0,3325 = 0,598 + 0,3325 = 0,9305$

d) $$p_{\overline{\text{D}}}(\text{A}) = \frac{p(\text{A} \cap \overline{\text{D}})}{p(\overline{\text{D}})} = \frac{0,598}{0,9305} \approx 0,6427$$

2) a) Lors d'un tirage dans la production de A, on s'intéresse à la probabilité p d'avoir une ampoule sans défaut (succès), avec $p = p_{\text{A}}(\overline{\text{D}}) = 0,92$. La probabilité d'échec est donc $q = 1 - 0,92 = 0,08$

On répète ce tirage 10 fois de façon identique (tirage sans remise) et indépendante.

X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,92)$.

b) $p(X = 7) = \binom{10}{7} 0,92^7 \times 0,08^3 \approx 0,0343.$

c) $p(X \geqslant 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{9} 0,92^9 \times 0,08 + 0,92^{10} \approx 0,8121.$

Autre possibilité avec la fonction de répartition : $p(X \geqslant 9) = 1 - p(X \leqslant 8)$.

d) Obtenir au moins 2 ampoules présentant un défaut revient à obtenir au plus 8 ampoules ne présentant aucun défaut.

$p(X \leqslant 8) = 1 - p(X \geqslant 9) \approx 1 - 0,8121 \approx 0,1879$

EXERCICE 5

Lance-balle **(4 points)**

Partie A

1) X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(20\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$

2) $p(X = 10) = \dbinom{20}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20} \approx 0,176$

3) $$\begin{aligned} p(5 \leqslant X \leqslant 10) &= p(X \leqslant 10) - p(X \leqslant 4) \\ &= \text{binomFRép}(20, 0.5, 10) - \text{binomFRép}(20, 0.5, 4) \\ &\approx 0,582 \end{aligned}$$

Partie B

1) On obtient le tableau de probabilité suivant :

	D	$\overline{D}$	Total
L	0,24	0,265	0,505
C	0,26	0,235	0,495
Total	0,5	0,5	1

2) $p_C(D) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(C)} = \dfrac{0,26}{0,495} \approx 0,525$