Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 18 octobre 2017

Exercice 1

ROC **(3 points)**

Bernoulli voir cours. On pose ensuite, comme $q > 0$, $q = 1 + a$, avec $a > 0$.

De $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Exercice 2

Limites de suites définies explicitement **(4 points)**

1) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} \overset{\div n}{=} \dfrac{2n - 3 + \frac{2}{n}}{\frac{1}{n} - 1}$, $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 3 + \dfrac{2}{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - 1 = -1 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2) $n \geqslant 2$, on encadre le terme u_n

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \overset{+n}{\Leftrightarrow} n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1 \overset{\div n^2-1}{\Leftrightarrow} \frac{n-1}{n^2-1} \leqslant \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leqslant \frac{n+1}{n^2-1}$$

En remarquant que $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = 0.$

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) $u_n = \dfrac{3n}{n+1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \overset{\div n}{=} \dfrac{3}{1 + \frac{1}{n}} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{1 + \frac{1}{n}} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

4) $u_n = 5^n - 4^n = 5^n \left[1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]$, $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty \text{ car } 5 > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \dfrac{4}{5} < 1 \end{array}\right\}$ Par Produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 3

Suite arithmético-géométrique **(4 points)**

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$

Initialisation : $n = 0$, $u_0 = -2 \leqslant 6$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geqslant 6$, montrons que $u_{n+1} \geqslant 6$.

HR : $u_n \leqslant 6 \overset{\times\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2}u_n \leqslant 3 \overset{+3}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2}u_n + 3 \leqslant 6 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant 6$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \dfrac{1}{2}u_n$ or $u_n \leqslant 6 \overset{\times -\frac{1}{2}}{\Rightarrow} -\dfrac{1}{2}u_n \geqslant -3 \overset{+3}{\Rightarrow} 3 - \dfrac{1}{2}u_n \geqslant 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante.

3) La suite (u_n) est croissante et majorée par 6, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers ℓ avec $\ell \leqslant 6$

4) Le fonction associée $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1}{2}\ell + 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ell = 3 \Leftrightarrow \ell = 6$

Exercice 4

Suite auxiliaire **(3,5 points)**

1) $u_2 = \dfrac{2}{2\times 1} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{3}{2\times 2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$, $u_4 = \dfrac{4}{2\times 3} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$

2) a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \times \dfrac{1}{n+1} \times u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_n}{n} = \dfrac{1}{2}v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = \dfrac{1}{2}$

b) On a alors $v_n = v_1 q^{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n = nv_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$, or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n} = +\infty$, par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 5

Tableau excel **(7 points)**

Partie A : Conjectures

1) En B3 : $\boxed{= 2^*\text{B2} - \text{A2} + 3}$ et en C3 : $\boxed{2^*\text{C2}}$ ou $\boxed{2\text{\textasciicircum A3}}$

2) Au vu du tableau, on peut conjecturer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

n	10	11	12	13
$\dfrac{u_n}{v_n}$	3,007	3,004	3,002	3,001

on peut conjecturer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$

Partie B : Étude des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1) Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

Initialisation : $n = 0.3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1 = u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ montrons que $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n - 1$.

$u_{n+1} = 2u_n - n + 3 \overset{\text{HR}}{=} 2(3\times 2^n + n - 2) - n + 3 = 3\times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 = 3\times 2^{n+1} + n - 1$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 3 \times 2^n + n - 2.$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \ \text{ car } \ 2 > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n - 2 = +\infty \end{array}\right\}$ Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n+1-2}{2^{n+1}} - 3 - \dfrac{n-2}{2^n} = \dfrac{n-1-2n+4}{2^{n+1}} = \dfrac{3-n}{2^{n+1}}.$

Si $\ n \geqslant 3 \ \Rightarrow \ 3 - n \leqslant 0$ donc $\ \forall n \geqslant 3,\ \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 0$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante.

4) Pour n supérieur ou égal à 4 :

$0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n} \overset{-\frac{2}{2^n}}{\Leftrightarrow} -\dfrac{2}{2^n} < \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{2}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{2^n} \overset{+3}{\Leftrightarrow} 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 + \dfrac{n-2}{2^n} \leqslant 3 + \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.$

$\Leftrightarrow \quad 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \ \text{ car } \ -1 < \dfrac{1}{2} < 1 \end{array}\right.$ par somme $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 3 \end{array}\right.$

d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$