Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 04 décembre 2017

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

Voir cours.

EXERCICE 2

Propriétés, équation et inéquation **(3 points)**

1) a) Comme la fonction exp est monotone sur $\mathbb{R}$, on a les équivalences :
$e^{x^2+5} = e^{2x+4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+5 = 2x+4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$
$S = \{1\}$

b) Comme la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a les équivalences :
$xe^{2x} - 2e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad S = (2)$

2) Comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a les équivalences :
$e^{2x-1} > e^x \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad S =]1\,;+\infty[.$

EXERCICE 3

Limite et dérivée. **(4 points)**

1) a) $\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{x} = +\infty$.

b) $\dfrac{e^x-1}{3x} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{e^x-1}{x}$, or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ par produit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{3x} = \dfrac{1}{3}$.

c) $(x-1)e^x = xe^x - e^x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0$ par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^x = 0$.

2) $(e^u)' = u'e^u$

$f'(x) = -e^{2x+1} + 2(1-x)e^{2x+1} = e^{2x+1}(-1+2-2x) = e^{2x+1}(1-2x)$.

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x+1} > 0$. Signe $f'(x) =$ signe $(1-2x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^2$	$\searrow$	

EXERCICE 4

Un grand BOUM **(10 points)**

Partie A

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

$$g(x) = (1-x)e^x + 1 \text{ donc } \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit et somme} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{array}.$$

2) $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$.

$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$

signe de $g'(x)$ = signe de $(-x)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3) Sur $]-\infty\,;\,0[$, $g(x) > 1$ donc ne peut s'annuler.

Sur $[0\,;+\infty[$

- g est continue car dérivable.
- g est monotone car décroissante.
- g change de signe car $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Conclusion : Sur $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

$g(2) = -e^2 + 1 \approx -6,39$ donc g change de signe sur [0,2] et donc $0 < \alpha < 2$.

L'algorithme de dichotomie donne : $1,278 < \alpha < 1,279$ après 11 itérations.

4) $g(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\alpha)e^\alpha + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^\alpha = \dfrac{-1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5) D'après les variation de g, si $x < \alpha$ alors $g(x) > 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) < 0$

Partie B

1) a) $\mathscr{A}(x) = x \times f(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

b) $\mathscr{A}'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4(e^x - xe^x + 1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{4}{(e^x+1)^2} > 0$ donc signe de $\mathscr{A}'(x)$ = signe de $g(x)$. D'après la partie A :

x	0		α		$+\infty$
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\mathscr{A}(\alpha)$	$\searrow$	

2) L'aire du rectangle BOUM est donc maximale lorsque M a pour abscisse α.

$$\mathscr{A}(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^\alpha + 1} \overset{\text{A 5)}}{=} \frac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha - 1} + 1} \overset{\times(\alpha-1)}{=} \frac{4\alpha(\alpha - 1)}{1 + \alpha - 1} = \frac{4\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} = 4(\alpha - 1)$$

$1,278 < \alpha < 1,279 \quad \Leftrightarrow \quad 0,278 < \alpha - 1 < 0,279 \quad \Leftrightarrow \quad 1,112 < 4(\alpha - 1) < 1,116 \quad \Leftrightarrow$

$$1,112 < \mathscr{A}(\alpha) < 1,116$$

3) La pente de la droite (BU) en α vaut : $m = -\dfrac{\text{OU}}{\text{OB}} = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$.

La pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en α vaut : $f'(\alpha)$.

On dérive f : $f'(x) = -\dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^1}$, la valeur en α vaut donc :

$$f'(\alpha) = -\frac{4e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2} = -\frac{4}{e^\alpha + 1} \times \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} \overset{\text{A 5)}}{=} -f(\alpha) \times \frac{\dfrac{1}{\alpha - 1}}{\dfrac{1}{\alpha - 1} + 1} = -f(\alpha) \times \frac{1}{1 + \alpha - 1}$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

Les deux pentes sont égales, donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ en α est parallèle à la droite (BU).