Contrôle de mathématiques

Mercredi 27 septembre 2017

EXERCICE 1

Monotonie **(2 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n-1}{2n+3}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5}{(2n+3)(2n+5)}$

2) En déduite la monotonie de la suite (u_n)

EXERCICE 2

Programmation d'une suite **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

1) a) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les valeurs sous forme de fraction.
   b) Quelle conjecture peut-on faire sur la monotonie de la suite (u_n).
   c) Démontrer cette conjecture.

2) Recopier l'algorithme suivant en complétant les pointillés afin qu'il donne la valeur de u_n, où n est donné.

3) Rentrer alors ce programme dans votre calculatrice puis compléter le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près.

```
Variables : N, I  entiers  U réel
Entrées et initialisation
    Lire N
    ··· → U
Traitement
    pour I variant de 1 à N faire
        U + ··· → U
    fin
Sorties : Afficher U
```

N	1	10	50	100	200	1000
u	0,500					0,693

4) a) Ces valeurs confirme-t-elle votre conjecture sur la monotonie.
   b) Quelle conjecture sur la convergence de (u_n) peut-on faire ?

EXERCICE 3

ROC et somme **(4 points)**

1) Montrer que pour $q \neq 1$ on a : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2) On donne la somme suivante : $S = 2 + 11 + 20 + 29 + \ldots 2018$
   a) S'agit-il de la somme des termes d'une suite géométrique ou arithmétique ?
   b) Déterminer le nombre de termes de cette somme. On détaillera les calculs.
   c) En déduire la valeur exacte de la somme S. On donnera la formule utilisée.

EXERCICE 4

Population d'abeilles **(5 points)**

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète 20 000 nouvelles abeilles chaque année.
On note u_0 le nombre d'abeilles, **en dizaines de milliers**, de cet apiculteur au début de l'étude. Ainsi $u_0 = 1$
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, **en dizaines de milliers**, au bout de la n-ième année.

1) Montrer que : $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$.
2) a) Écrire un algorithme permettant de calculer u_n, n étant donné.
   b) Recopier et remplir le tableau à l'aide de cet algorithme à 10^{-3} près.

n	1	2	5	10	50
u_n					

   c) Quelle conjecture quant à la convergence de la suite (u_n) peut-on faire ?
3) On pose $v_n = u_n - 10$
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000. Son objectif sera-t-il atteint ?

EXERCICE 5

Suite homographique **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 et u_2
   b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas nul et on pose $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n}$
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.
   c) Vers quel nombre tend la suite (u_n) ?