Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 17 octobre 2018

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

Bernoulli voir cours. On pose ensuite, comme $q > 1$, $q = 1 + a$, avec $a > 0$.

De $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

EXERCICE 2

Limites de suites définies explicitement **(4 points)**

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 - n + (-1)^n \leqslant 2 - n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \leqslant 3 - n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - n = -\infty$, par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) $$u_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 4\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \quad \text{or} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1$$

Par somme et produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

3) $$u_n = \frac{-2n+3}{n^2+3n-5} \overset{\div n}{=} \frac{-2 + \frac{3}{n}}{n + 3 - \frac{5}{n}} \qquad \left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} -2 + \frac{3}{n} = 2 \\ &\lim_{n\to+\infty} n + 3 - \frac{5}{n} = +\infty \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Par quotient} \\ &\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{aligned}$$

4) $$u_n = \frac{4n^2+3n-1}{2n+1} - 2n+1 = \frac{4n^2+3n-1+(-2n+1)(2n+1)}{2n+1} = \frac{4n^2+3n-1-4n^2+1}{2n+1}$$

$$= \frac{3n}{2n+1} \overset{\div n}{=} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$ par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 3

Vrai faux **(5 points)**

1) **Affirmation A : Vraie**

$t_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 2u_n - 5 - 5 = 2u_n - 10 = 2(u_n - 5) = 2t_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 2$

On en déduit que la suite (t_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 5$

Affirmation B : Vraie

On a $t_n = t_0 q^n = 9 \times 2^n$ donc $u_n = t_n + 5 = 9 \times 2^n + 5$.

2) **Affirmation C : Fausse**
On peut avoir l'impression d'un théorème des gendarmes, mais il manque un élément : les deux suites "gendarmes" ne convergent pas vers la même limite, donc il manque une des conditions pour que le théorème s'applique.

Contre-exemple : $v_n = (-1)^n$
Les termes v_n prennent alternativement les valeurs -1 et 1 suivant la parité de n. Les termes vérifient pour tout $n \geqslant 1$ l'encadrement donné, en effet :

$$-1 - \frac{1}{n} \leqslant -1 \leqslant v_n \leqslant 1 \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

Mais la suite (v_n) n'admet par de limite.

3) **Affirmation D : Vraie**
Il suffit de réorganiser les termes et appliquer la formule de la somme des n premiers entiers naturels.

$$S_n = (8\times 1 + 3) + (8\times 2 + 3) + \cdots + (8\times n + 3) = 8\underbrace{(1 + 2 + \cdots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n \text{ termes}}$$

$$= \frac{8n(n+1)}{2} + 3n = 4n^2 + 4n + 3n = 4n^2 + 7n = n(4n+7)$$

4) **Affirmation E : Fausse**
Les termes peuvent être strictement positifs et converger vers 0.
Contre exemple : $w_n = \dfrac{1}{n}$.
Tous les termes w_n sont strictement positifs mais convergent vers 0.
Remarque : quand on passe à la limite, une inégalité stricte devient large.

EXERCICE 4

Évolution d'une population animale **(8 points)**

Partie A : un premier modèle

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + \dfrac{8}{100} v_n = 1,08 v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 1,08$ et de premier terme $v_0 = 12$

2) $v_{19} = 12 \times 1,08^{19} \approx 51,788$, soit une population d'environ 51 788.
Ce modèle ne répond pas aux contraintes du milieu naturel car la suite (v_n) diverge vers $+\infty$. En effet dès la 19e année la population dépassent 50 000 individus.

Partie B : un second modèle

1) a) $f'(x) = -\dfrac{1}{90}x + 1,25$. La fonction f est croissante si :

$$f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{90}x + 1,25 > 0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{90}x > -1,25 \quad\overset{\times(-90)}{\Leftrightarrow}\quad x < 112,5$$

La fonction f est donc croissante dans l'intervalle [0 ;50].

b) $f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1}{180}x^2 + 1,25x = x \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1}{180}x^2 + 0,25x \overset{\times 180}{\Leftrightarrow} -x^2 + 45x = 0.$

$\Leftrightarrow \quad x(-x+45) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 45.$

2) a) $u_1 = -\dfrac{12^2}{180} + 1,25 \times 12 = 14,2.$

La population en 2018 est estimée avec ce modèle à 14 200 individus.

b) **Initialisation :** $n = 0$, $u_0 = 12$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 45$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 45$ montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 45$.

HR : $0 \leqslant u_n \leqslant 45$

Comme la fonction f est croissante sur [0,45], elle ne change pas les inégalités :

$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(45) \overset{f(45)=45}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 45$ car 45 est solution de $f(x) = x$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 45.$

c) $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n^2}{180} + 1,25u_n - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 45u_n}{180} = \dfrac{u_n(-u_n + 45)}{180}.$

D'après la question précédente, on sait que $u_n \geqslant 0$ et $u_n \leqslant 45 \quad \Rightarrow \quad -u_n + 45 \geqslant 0.$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante.

d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 45, donc, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers ℓ avec $0 \leqslant \ell \leqslant 45$.

e) La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ. Comme f est continue sur [0 ;50], d'après le théorème du point fixe ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Cette équation admet deux solutions $x = 0$ et $x = 45$, comme (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ alors $\ell \geqslant 12$, on en déduit donc que $\ell = 45$.
D'après ce modèle la population va se stabiliser vers 45 000 individus.

3) On a l'algorithme suivant :

Variables : n, entier, u réel
Entrées et initialisation
  n prend la valeur 0
  u prend la valeur 12
Traitement
  tant que $u \leqslant 42$ **faire**
    u prend la valeur $-\dfrac{1}{180}u^2 + 1,25u$
    n prend la valeur $n+1$
  fin
Sorties : Afficher n

On trouve alors : $N = 15$. Cela se produira donc en $2017 + 15 = 2032$.