Correction devoir du lundi 05 novembre 2018

Exercice I

Déterminer une fonction à partir de sa représentation **(10 points)**

Partie A : Lecture graphique

Déterminer les questions suivantes graphiquement

1) a) $f(2) = 8$, $f(3) = 1$ et $f(9) = 1$.

b) On trouve deux solutions à l'équation $f(x) = 0$: $x_1 \approx 3,5$ et $x_2 \approx 7.5$.

c) On peut remplir le tableau de signe suivant :

x	1		3,5		7,5		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) a) $\mathscr{C}_f$ admet un minimum au point $x = 5$, comme la fonction f est dérivable en 5, on a alors $f'(5) = 0$ (tangente horizontale).

b) (T) passe par les points (0,10) et (3,1), on en déduit alors son équation :

$$y = \frac{1-10}{3-0}x + 10 \quad\Leftrightarrow\quad y = -3x + 10 \quad\Rightarrow\quad f'(3) = -3$$

c) On a le tableau de variation suivant :

x	1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

On a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Partie B : Expression de f et confirmation des résultats de la partie A

1) a) $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

b) On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f'(5) = 0 \\ f(2) = 8 \\ f(9) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \dfrac{c}{16} = 0 \\ 2a + b + c = 8 \\ 9a + b + \dfrac{c}{8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 16a & (1) \\ 18a + b = 8 & (2) \\ 11a + b = 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 16a \\ 7a = 7 & (2)-(3) \\ b = 1 - 11a \end{cases}$$

On trouve alors : $a = 1$, $b = -10$, $c = 16$ d'où $f(x) = x - 10 + \dfrac{16}{x-1}$

2) a) $f(x) - (x - 10) = \dfrac{16}{x-1}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16}{x-1} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-10)] = 0$. La distance entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (Δ) d'équation $y = x-10$ tend vers 0 en $+\infty$. La droite (Δ) est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

b) $f(3) = 3 - 10 + \dfrac{16}{2} = 1$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{16}{(x-1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(3) = 1 - \dfrac{16}{4} = -3.$

L'équation au point d'abscisse 3 :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) \quad \Leftrightarrow \quad y = -3(x-3) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3x + 10$$

c) $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 10 + \dfrac{16}{x-1} = 0 \quad \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad (x-10)(x-1)+16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 11x + 26 = 0$

$\Delta = 121 – 104 = 17 > 0$, 2 racines $x_1 = \dfrac{11 + \sqrt{17}}{2} \approx 7,6$ ou $x_2 = \dfrac{11 - \sqrt{17}}{2} \approx 3,4$

Exercice II

Vrai-Faux **(5 points)**

1) **Proposition 1 : Fausse**

L'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions : $x_1 \in]-\infty\,;\,1[$, $x_2 \in]1\,;\,3[$ et $x_3 \in]3\,;\,+\infty[$.

2) **Proposition 2 : Fausse**

Si $a \leqslant 0$, l'équation $f(x) = a$ n'admet qu'une solution.

3) **Proposition 3 : Vraie**

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$.

$\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = 0$ et $y = 1$.

4) **Proposition 4 : Vraie**

D'après le tableau de variation, la fonction f admet un maximum en 3, comme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$, on a alors $f'(3) = 0$.

5) **Proposition 5 : Fausse**

D'après le tableau de variation : $\forall x \in]-\infty,\ 1[,\quad f(x) > 0$.

On ne peut avoir $f(-50) = 0$.

Exercice III

Étude d'une fonction **(5 points)**

1) $f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = 1 \quad \overset{x^2\neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 2x = x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}.$

$\mathscr{C}_f$ coupe la droite $y = 1$ au point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$.

2) $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x^2-1) - 2x(x^2-2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^2 + 2 - 2x^3 + 4x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{(x^2-1)^2}$

$$= \dfrac{2(x^2 - x + 1)}{(x^2-1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$, $\dfrac{2}{(x^2-1)^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ signe de $f'(x) =$ signe de $(x^2 - x + 1)$.

3) Racine de $x^2 - x + 1$: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ pas de racine.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$, $x^2 - x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}-\{-1\,;\,1\}$.

4) Limite en $+\infty$: $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}\overset{\div x^2}{=}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$. On a alors $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x^2}=1\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Limite en 1 :

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} x^2-2x=-1\\ \lim\limits_{x\to1^+} x^2-1=0^+\\ \lim\limits_{x\to1^-} x^2-1=0^-\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit une asymptote horizontale $y=1$ et une asymptote verticale $x=1$.

5) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

6) Si $\mathscr{C}_f$ a une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-x$ alors $\exists x_0,\ \ f'(x_0)=-1$.
Impossible car $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\,;\,1\},\ \ f'(x)>0$.

A titre indicatif, voici la courbe $\mathscr{C}_f$: