Contrôle de mathématiques

Mercredi 26 septembre 2018

Exercice 1

Monotonie **(2 points)**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = 2n^2 - 3n + 4$

1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = 4n - 1$
2) En déduite la monotonie de la suite (u_n)

Exercice 2

Programmation d'une suite **(5 points)**

On donne l'algorithme suivant :

```
Variables : N, K   entiers  U réel
Entrées et initialisation
    Lire N
    0 → U
Traitement
    pour K variant de 1 à N faire
        U + 1/K² → U
    fin
Sorties : Afficher U
```

1) Qu'affiche cet algorithme pour $N = 1$, $N = 2$ et $N = 3$.
   On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.
2) Cet algorithme calcule le terme général u_n d'une suite (u_n) en fonction de n.
   Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3) Rentrer alors ce programme dans votre calculatrice puis compléter le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près.

N	1	10	50	100	1000	2000
u		1,550				

4) Quelle conjecture sur la convergence de (u_n) peut-on faire ?

Exercice 3

Somme de terme **(4 points)**

1) Sans utiliser de calculatrice, comparer les deux nombres A et B suivants :

$$A = 2012(1 + 2 + \cdots + 2013) \quad \text{et} \quad B = 2013(1 + 2 + \cdots + 2012)$$

2) Soit une suite géométrique (v_n) telle que : $v_7 = 1$ et $v_{10} = 8$.
   a) Déterminer la raison de la suite (v_n) puis le terme v_{15}.
   b) Calculer la somme : $S = v_7 + v_8 + \cdots + v_{15}$
      On rappellera la formule utilisée.

EXERCICE 4

Température d'un four **(5 points)**

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 ° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Soit la suite (T_n), où T_n représente la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.
La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

$T \leftarrow 1\,000$
pour i variant de 1 à n **faire**
| $T \leftarrow 0,82 \times T + 3,6$
fin

1) Quelle est la relation de récurrence qui détermine T_{n+1} en fonction de T_n ?
   Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, après 4 heures de refroidissement.
2) On pose la suite (v_n) telle que : $v_n = T_n - 20$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprimer v_n puis T_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (T_n).
3) Écrire un algorithme qui permette de déterminer le nombre d'heures nécessaire pour que le four puisse être ouvert sans risque pour les céramiques. Donner alors ce nombre d'heures.

EXERCICE 5

Suite auxiliaire **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3
   b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est positif et on pose $v_n = u_n^2$
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.
   c) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 50$