Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 26 septembre 2018

Exercice 1

Monotonie **(2 points)**

1) $u_{n+1}-u_n = 2(n+1)^2-3(n+1)+4-(2n^2-3n+4) = 2(n^2+2n+1)-3n-3+4-2n^2+3n-4$
$= 2n^2+4n+2-3n-3+4-2n^2+3n-4 = 4n-1$

2) $n \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 4n \geqslant 4 \quad \Rightarrow \quad 4n-1 \geqslant 3.$
$\forall n \geqslant 1,\ \ u_{n+1}-u_n > 0.$ La suite (u_n) est croissante.

Exercice 2

Programmation d'une suite **(5 points)**

1) $N=1$: 1 boucle $\quad U=1$

$N=2$: 2 boucles $\quad U = 1+\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{5}{4}$

$N=3$: 3 boucles $\quad U = 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2} = 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9} = \dfrac{36+9+4}{36} = \dfrac{49}{36}.$

2) $u_n = 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ (somme des inverses au carré).

3) On trouve alors

N	10	50	100	1000	2000
u	1,550	1,625	1,635	1,644	1,644

4) Conjecture : la suite (u_n) converge vers 1,644.
On peut montrer que la suite (u_n) tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3

Somme de terme **(4 points)**

1) La somme des n premiers naturels : $\quad 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$1+2+\cdots+2013 = \dfrac{2013\times 2014}{2} \quad$ et $\quad 1+2+\cdots+2012 = \dfrac{2012\times 2013}{2}$

On a alors : $\quad A = \dfrac{2012\times 2013\times 2014}{2} \quad$ et $\quad B = \dfrac{2013\times 2012\times 2013}{2}$

On a donc $\quad A-B = \dfrac{2012\times 2013}{2}(2014-2013) = \dfrac{2012\times 2013}{2} > 0 \quad$ donc $\ A > B$.

2) a) $v_{10} = v_7 q^3 \quad \Leftrightarrow \quad q^3 = \dfrac{v_{10}}{v_7} = 8 = 2^3$ donc $\ q = 2$.
$v_{15} = v_{10}q^5 = 8\times 2^5 = 256$

b) $S = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$

Le nombre de termes : $(15 - 7) + 1 = 9$

$S = v_7 + v_8 + \cdots + v_{15} = 1 \times \dfrac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2^9 - 1 = 511$

Exercice 4

Température d'un four **(5 points)**

1) $T_{n+1} = 0,82T_n + 3,6$
$T_1 = 0,82 \times 1000 + 3,6 \approx 824,$
$T_2 = 0,82 \times 824 + 3,6 \approx 679,$
$T_3 = 0,82 \times 679 + 3,6 \approx 560,$
$T_4 = 0,82 \times 560 + 3,6 \approx 463$
La température du four est de 463˚C après 4 heures de refroidissement.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = 0,82T_n + 3,6 - 20 = 0,82T_n - 16.4 = 0,82\left(T_n - \dfrac{16,4}{0,82}\right)$
$= 0,82(T_n - 20) = 0,82v_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,82,$ la suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,82$ et de premier terme $v_0 = T_0 - 20 = 980.$

b) $v_n = 980(0,82)^n$ et $T_n = v_n + 20 = 980(0,82)^n + 20.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,82^n = 0$ car $-1 < 0,82 < 1.$
Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 20.$

3) On peut alors écrire l'algorithme suivant :

Variables : N, entiers U réel
Entrées et initialisation
  $0 \to N$
  $1000 \to T$
Traitement
  tant que $T \geqslant 70$ **faire**
    $0,82T + 3,6 \to$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

On trouve alors $N = 15$

Au bout de 15 heures on peut donc ouvrir la porte du four sans endommager les céramiques.

Exercice 5

Suite auxiliaire **(4 points)**

1) a) $u_1 = \sqrt{1+3} = 2,\quad u_2 = \sqrt{4+3} = \sqrt{7},\quad u_3 = \sqrt{7+3} = \sqrt{10}$

b) $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $u_2 - u_1 = \sqrt{7} - 2.$
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1,$ la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2) a) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n^2 + 3 - u_n^2 = 3.$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = 3,$ donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_0 = u_n^2 = 1.$

b) $v_n = v_0 + nr = 1 + 3n$ comme $u_n > 0$ on a $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1 + 3n}$.

c) $u_n \geqslant 50 \overset{u_n>0}{\Rightarrow} u_n^2 \geqslant 2500 \Rightarrow 1 + 3n \geqslant 2500 \Rightarrow n \geqslant \dfrac{2500 - 1}{3} \Rightarrow n \geqslant 833$

À partir de $n = 833$, $u_n \geqslant 50$.