Rappels sur les suites - Algorithme

Table des matières

1 Suite : généralités

1.1 Définition

Définition 1 : Une suite (u_n) est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$. À un rang donné n, on associe un nombre réel noté u_n.

$$\begin{array}{cccc} (u_n) & : & \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto u_n \end{array}$$

Remarque :

- u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).
- Noter la différence entre la suite dans son ensemble notée (u_n) et le terme général noté u_n
- Si une suite est définie à partir du rang p, on peut noter $(u_n)_{n \geqslant p}$

Exemples :

- $(u_n) : 2\,;5\,;8\,;11\,;14\,;17\,;\dots$ suite arithmétique
- $(v_n) : 3\,;6\,;12\,;24\,;48\,;96\,;\dots$ suite géométrique

1.2 Définir et programmer une suite

a) On peut définir une suite de **façon explicite** : $u_n = f(n)$

$$u_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sqrt{n-3} \quad n \geqslant 3$$

b) On peut aussi définir une suite de **façon récurrente** à un ou plusieurs termes :

- À un terme : $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}75u_n + 2 \end{cases}$$

$(u_n) : 4\,;\ 5\,;\ 5{,}75\,;\ 6{,}3125\,;\dots$

n	5	10	20	30
u	7,050 8	7,774 7	7,987 3	7,999 9

(u_n) semble croissante et converger vers 8

Programme de (u_n) en langage naturel

Entrées et initialisation
    Lire n
    $4 \to u$
Traitement
    pour i variant de 1 à n **faire**
        $0{,}75u + 2 \to u$
    fin
Sorties : Afficher u

Python : un programme **récursif** part de l'indice n puis descend progressivement l'indice jusqu'au premier terme. Un programme **itératif** part de l'indice du premier terme jusqu'à l'indice n.

⚠ range(1 , $n+1$) est l'ensemble des entiers naturels de 1 jusqu'à n

```python
def u(n):
    if n==0:
        return 4
    return 0.75*u(n-1)+2
```

Programme récursif

```python
def u(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=0.75*u+2
    return u
```

Programme itératif

- À deux termes : $u_{n+2} = f(u_{n+1}\,,\,u_n)$

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

$(u_n) : 1\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 8\,;\ 13\,;\ldots$

N	10	15	20	30
V	89	987	10 946	1 346 269

Prgm : on introduit 3 variables u, v et w : u et v pour la relation de récurrence et w pour ne pas écraser l'ancienne valeur de v que l'on affecte à u.

Programme de (u_n) en langage naturel

Entrées et initialisation
Lire n
$1 \to u \quad , \quad 1 \to v$
Traitement
pour i variant de 2 à n **faire**
$u + v \to w$
$v \to u$
$w \to v$
fin
Sorties : Afficher v

Python :

```
def u(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    return u(n-1)+u(n-2)
```

Programme récursif

```
def u(n):
    u=1
    v=1
    for i in range(2,n+1):
        w=u+v
        u=v
        w=v
    return u(n-1)+u(n-2)
```

Programme itératif

c) On peut encore définir une suite par l'intermédiaire d'une autre suite ou par une somme de termes, à l'aide d'une intégrale, etc…

On peut définir la suite (v_n) à partir d'une suite (u_n) par : $v_n = u_n - 4$

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad , \quad I_n = \int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(cf chapitre 8)}$$

Python : donner une valeur approchée de (w_n), n étant donné :

Par exemple, pour w_5, w_{10}, w_{50}.

- $w_5 \approx 2,283$
- $w_{10} \approx 2,923$
- $w_{50} \approx 4,499$

Remarque : On pourrait montrer que cette suite (w_n) diverge

```
def w(n):
    w=0
    for i in range(1,n+1):
        w=w+1/i
    return w
```

Programme itératif

d) On peut aussi définir une suite par une assertion explicite sans pour autant être capable de préciser la valeur d'un terme quelconque.

Par exemple la suite (d_n) qui au rang $n \geqslant 1$ associe d_n la n ième décimale du nombre $\pi = 3{,}141\,592\ldots$: $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, $d_3 = 1$, $d_4 = 5$, $d_5 = 9$, $d_6 = 2\ldots$[1].

1. Le développement décimal de π ouvre le champ à de nombreuses questions, notamment celle de savoir si π est un nombre normal, c'est-à-dire que ses chiffres en écriture décimale sont équirépartis. On peut aussi se demander si π est un nombre univers, ce qui signifie qu'on pourrait trouver dans son développement décimal n'importe quelle suite finie de chiffres. Il n'existe pas de réponse à ces questions à ce jour

1.3 Variation ou monotonie d'une suite

Définition 2 : Soit (u_n) une suite numérique. On dit que :

- la suite (u_n) est strictement **croissante** (à partir d'un certain rang k) lorsque
$$u_{n+1} > u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant k$$
- la suite (u_n) est strictement **décroissante** (à partir d'un certain rang k) lorsque
$$u_{n+1} < u_n \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant k$$
- la suite (u_n) est **monotone** (à partir d'un certain rang k) si elle est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang k

Remarque :
Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes : $u_n = (-1)^n$

Les premiers termes de la suite n'entrent pas nécessairement en compte dans la variation d'une suite. Ils peuvent cependant donner une indication pour la monotonie de la suite.

1.4 Comment montrer la monotonie d'une suite

Règle 1 : Pour montrer la monotonie d'une suite (u_n),

- On étudie le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$. (cas le plus fréquent)
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ alors, (u_n) est croissante
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ alors, (u_n) est décroissante.
- Si les termes u_n sont strictement positifs, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors, (u_n) est croissante
  si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors, (u_n) est décroissante
- Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $u_n = f(u_n)$, on peut utiliser un raisonnement par récurrence. (cf chapitre 2)

Exemples :

- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = n^2 - n$ est croissante.
  Étudions le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$

  $$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$$

  $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n \geqslant 0 \ \Rightarrow\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante.

- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ est croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \frac{2^n}{n} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

$n \geqslant 1 \overset{+n}{\Leftrightarrow} 2n \geqslant n+1 \overset{\div(n+1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{2n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

$\forall n \geqslant 1 \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$ la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

- Montrer que la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$ est décroissante.

  On étudie la fonction associée f définie sur $I = [2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
  Cette fonction est dérivable sur I, donc

$$\forall x \in I,\quad f'(x) = \frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

  La fonction f est donc décroissante sur I, donc la suite (u_n) est décroissante

1.5 Visualisation d'une suite

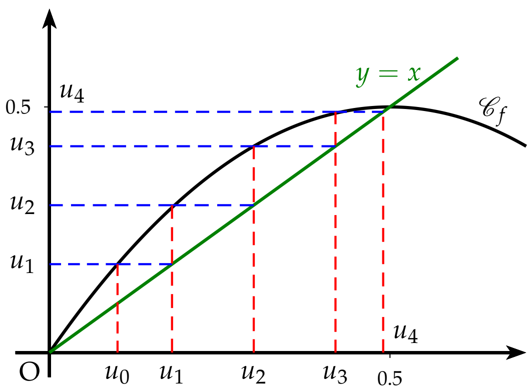
Propriété 1 : Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, il suffit de tracer la courbe de la fonction associée f et la droite $y = x$. La droite sert à reporter les termes de la suite sur l'axe des abscisses.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

On obtient alors le graphe suivant, après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x(1-x)$$

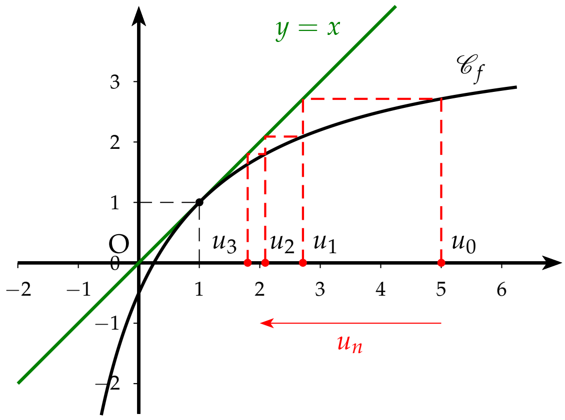


Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

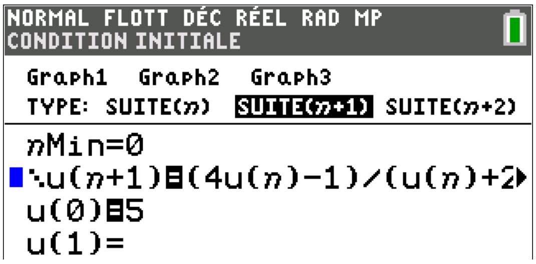
f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$.

Après avoir tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, placer u_0 sur l'axe des abscisses, construire $u_1,\ u_2$ et u_3 en laissant apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle semble converger vers 1 qui est l'abscisse du point d'intersection entre la droite $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}_f$.



, sélectionner le mode "Suite" et le format "'Toile". Rentrer la suite, régler la fenêtre, appuyer sur "graphe" puis sur "trace". À l'aide de la flèche de droite obtenir les différents termes.




```
FENÊTRE
 nMin=0
 nMax=10
 DbutTracé=1
 PasTracé=1
 Xmin=-2
 Xmax=6
 Xgrad=1
 Ymin=-2
↓Ymax=4
 Ygrad=1
```

2 Suite arithmétique (rappels)

2.1 Définition

Définition 3 : Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ $\quad r$ étant la raison de la suite

Remarque : Une suite arithmétique correspond à une progression linéaire

Exemple : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ $\qquad (u_n) : 2\,;\ 5\,;\ 8\,;\ 11\,;\ 14\,;\ 17\,;\ldots$

2.2 Comment la reconnaît-on ?

Théorème 1 : Une suite (u_n) est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r \quad \Leftrightarrow \quad (u_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r$$

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_n = 4n - 1$. Montrer que (u_n) est arithmétique.
$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 1 - (4n-1) = 4$, donc (u_n) est arithmétique.

2.3 Expression du terme général en fonction de n

Règle 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = u_0 + nr$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = u_p + (n-p)r$

2.4 Somme des premiers termes

Théorème 2 : D'une façon générale, la somme des premiers termes d'une suite arithmétique obéit à :

$$S_n = \text{Nbre de termes} \times \frac{\Sigma \text{ termes extrêmes}}{2}$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

Exemple : Calculer $S = 8 + 13 + 18 + \cdots + 2013 + 2018$

S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 5 et de termes extrêmes 8 et 2018.
Le nbre de termes est : $\dfrac{2018 - 8}{5} + 1 = 403$. (Règle des piquets et des intervalles)

$$S = 403 \times \frac{8 + 2018}{2} = 408\,239$$

Python Vérification

Soit le programme suivant permettant de calculer S.
Comme la suite arithmétique est croissante, on peut proposer la boucle conditionnelle de condition $u < 2018$ et non $u \leqslant 2018$ car la dernière boucle se fait avec $u = 2013$ et l'on calcule encore un terme $u = 2018$ que l'on ajoute à la somme S.
On retrouve bien le résultat calculé.

```python
def s():
    u=8
    s=8
    while u<2018:
        u=u+5
        s=s+u
    return s
```

3 Suite géométrique (rappels)

3.1 Définition

Définition 4 : Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n \quad q$ étant la raison de la suite

Remarque : Une suite géométrique correspond à une progression exponentielle.

Exemple : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \qquad (u_n) : 3\,;\ 6\,;\ 12\,;\ 24\,;\ 48\,;\ 96\,;\ldots$

3.2 Comment la reconnaît-on ?

Théorème 3 : Une suite (u_n) de termes non nul, est géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant. Cette constante est alors la raison.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \Leftrightarrow \quad (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q$$

Exemple : Soit la suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

On pose la suite $v_n = u_n - 1$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3(u_n - 1) = 3v_n \quad \text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 4$.

3.3 Expression du terme général en fonction de *n*

Règle 3 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n \times u_0$
- Si le premier terme est u_p, alors : $u_n = q^{n-p} \times u_p$

3.4 Somme des premiers termes

Théorème 4 : D'une façon générale, la somme des premiers termes d'une suite géométrique ($q \neq 1$) obéit à :

$$S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \Leftrightarrow \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple : Calculer la somme des termes suivants :

$$S = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + \cdots + 312,5$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique (u_n) de raison $q = -5$ de premier terme $u_0 = 0,02$.

On doit avoir : $u_n = 0,02(-5)^n = 312,5 \;\Rightarrow\; (-5)^n = \dfrac{312,5}{0,02} = 15\,625 = 5^6$.

Il y a alors 7 termes. $S = 0,02 \times \dfrac{1-(-5)^7}{1-(-5)} = \dfrac{5^7+1}{300} = 260,42$

3.5 Limite d'une suite géométrique

Théorème 5 : Soit une suite (u_n) définie par : $u_n = q^n$ (avec $q \in \mathbb{R}$)

- Si $q > 1$ alors (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
- Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors (u_n) est divergente et n'a pas de limite

Exemples :

- (u_n) suite géométrique : $u_0 = -2$ et $q = 1,5$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

  $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,5^n = +\infty$ car $1,5 > 1$. La suite (u_n) diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- (v_n) suite géométrique : $v_0 = 4$ et $q = \dfrac{3}{4}$. La suite (v_n) converge-t-elle ?

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$. La suite (u_n) converge vers 0.