Problèmes sur les suites monotones

EXERCICE 1

Colonie d'oiseaux

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1) Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

2) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;100]$ l'équation $f(x) = x$.
3) a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;100]$ et dresser son tableau de variations.
   b) En remarquant que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$$
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
   (On admettra que f est continue sur $[0\,;100]$)
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4) On considère l'algorithme suivant :
   L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

```
def seuil(p):
    n=0
    u=40
    while u<p:
        n=n+1
        u=0.008*u*(200-u)
    return n+2021
```

EXERCICE 2

Espèce animale

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 700 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 15 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = 0,75u_n(1-0,1u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1) Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = 0,75x(1-0,1x)$.

2) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ puis dresser son tableau de variations.
3) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
   On admettra que la fonction f est continue sur $[0\,;\,1]$.
5) Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   b) Le biologiste a programmé en Python la fonction menace() ci-dessous :

```
def menace():
    u=0.7
    n=0
    while u>0,015:
        u=0.75*u*(1-0.1*u)
        n=n+1
    return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.