

Limites de fonctions et continuité

Définitions

EXERCICE 1

Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x+2)e^{-x} + 1$ et la droite d d'équation $y = 1$.

1) Tracer la fonction f et la droite d pour $x \in [-3; 3]$ et $y \in [-3; 4]$.

Que peut-on conjecturer pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

2) Que représente la droite d pour la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$? Pourquoi?

3) On donne l'algorithme en Python  suivant.

a) Que représente $\text{abs}(f(x) - 1)$?

b) Que renvoie la fonction $\text{dist}(a)$?

c) À l'exécution, $\text{dist}(10^{**}(-3))$ renvoie 10 et $\text{dist}(10^{**}(-6))$ renvoie 17.

En quoi ces valeurs permettent-elles de vérifier la limite de $f(x)$ en $+\infty$?

```
from math import*
def f(x):
    return (x+2)*exp(-x)+1
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-1)>=a:
        x+=1
    return x
```

EXERCICE 2

Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 0,1x^3 + 0,15x^2 - 1,8x - 0,7$.

1) Tracer la fonction f pour $x \in [-6; 6]$ et $y \in [-5; 5]$.

Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$?

2) Comment peut-on le vérifier?

EXERCICE 3

1) Tracer la courbe de $f(x) = \frac{x+1}{2(1-x)}$ pour $x \in [-2; 4]$ et $y \in [-5; 5]$.

2) La fonction f admet-elle une limite en 1?

3) Conjecturer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

EXERCICE 4

1) Tracer la courbe de $f(x) = \frac{1}{(e^x - 1)^2}$ pour $x \in [-5; 5]$ et $y \in [-0.5; 8]$.

2) La fonction f admet-elle une limite en 0? Interpréter géométriquement.

EXERCICE 5

1) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

a) Tracer la courbe sur $x \in [-4; 4]$ et $y \in [-1; 5]$.

b) f est-elle définie en 0? Admet-elle une limite en 0? Si oui laquelle?

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

- a) Tracer la courbe sur $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-5 ; 5]$.
 b) f est-elle définie en 0? Admet-elle une limite en 0? Si oui laquelle?

Opérations sur les limites

EXERCICE 6

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = 5x^3 - 3x + 1$ 3) $f(x) = -2x^4 + x^2 + 3$
 2) $f(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x+2}$ 4) $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x} - 2e^x$

EXERCICE 7

Déterminer D_f des fonctions f suivantes puis les limites aux bornes de D_f .

- 1) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$ 3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
 2) $f(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}$ 4) $f(x) = \frac{3 - 5e^x}{1 + 2e^x}$

EXERCICE 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2}{(1+x)(1-x)}$

- 1) Tracer f sur $x \in [-4 ; 4]$ et $y \in [-10 ; 10]$: graduations 1 sur (Ox) et 2 sur (Oy).
 Conjecturer les limites en $\pm\infty$ et ± 1 .
 2) Démontrer ces conjectures.

Limite d'une fonction composée

EXERCICE 9

Déterminer les limites suivantes à l'aide du théorème de composition :

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x^2 + 5}$
 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-x + 1}{x^2 + 1}}$ 4) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$ 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{e^x}\right)$
 7) $\lim_{x \rightarrow -3^+} e^{\frac{-2}{x+3}}$ et $\lim_{x \rightarrow -3^-} e^{\frac{-2}{x+3}}$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^{-x+4}}$

EXERCICE 10

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) À l'aide du théorème de composition déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

EXERCICE 11

f est une fonction définie sur $] -5; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)]$
- 2) Trouver la forme algébrique de $f[f(x)]$ puis retrouver le résultat du 1)

EXERCICE 12

À l'aide de la fonction associée déterminer les limites suites suivantes :

- 1) $u_n = e^{-3n+5}$
- 2) $u_n = \sin\left(\frac{1}{3+n}\right)$
- 3) $u_n = e^{\frac{-2}{1+n}}$

Courbes et limites**EXERCICE 13**

f et g sont les fonctions définies sur $] -2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x+2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$$

- 1) Tracer dans une même fenêtre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur $x \in [-8; 8]$ et $y \in [-10; 10]$.
Que peut-on dire de \mathcal{C}_g par rapport à \mathcal{C}_f en ∞ ? Pourquoi?
- 2) a) Démontrer que pour tout $x > 2$: $g(x) - f(x) = \frac{4}{x+2}$
b) En déduire la limite de $g(x) - f(x)$ en $+\infty$.
c) Étudier la position relative \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
- 3) On considère l'algorithme suivant en Python 
 - a) Expliquer le rôle de la fonction $d(a)$.
 - b) Que retourne $d(0,01)$?

```
def d(a):
    x=-1
    while 4/(x+2)>a:
        x+=1
    return x
```

EXERCICE 14**Fonction catastrophe**

f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{(x^{20} + 100)^2 - 10\,000}{x^{20}}$

- 1) Tracer \mathcal{C}_f sur $x \in [0; 1,5]$ et $y \in [-50; 600]$ unités 0,5 sur (Ox) et 100 sur (Oy) .
- 2) Qu'observe t-on sur le graphe?
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en 0?

- 3) a) En développant $(x^{20} + 100)^2$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.
 b) Déterminer alors la limite de la fonction f en 0.
 c) Comment expliquer le graphe de \mathcal{C}_f de la calculatrice.

Limites par comparaison

EXERCICE 15

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} \qquad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2-\cos x} \qquad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x \sin x$$

EXERCICE 16

- 1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par : $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$
 a) En utilisant la quantité conjuguée, montrer que : $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$
 b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par : $g(x) = \frac{E(x) + 2}{x}$
 $E(x)$ est par partie entière de x .
 a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq E(x) \leq x$.
 b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

EXERCICE 17

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$

- 1) Déterminer les limites en $\pm\infty$ et en 1.
 2) Déterminer les éventuelles asymptotes

Continuité

EXERCICE 18

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-4}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) a) Tracer la fonction f sur $x, y \in [-5; 5]$.
 Fonction par morceaux sur la ti 83 : math \rightarrow B : parmorceau(
 b) Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur \mathbb{R} .
 2) Démontrer cette conjecture en distinguant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.

EXERCICE 19

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = e^x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = -x^2 + 2x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) a) Tracer la fonction f sur $x, y \in [-5 ; 5]$.
 b) Que peut-on conjecturer quant à la continuité de f sur \mathbb{R} .
 2) Démontrer cette conjecture en distinguant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.

EXERCICE 20

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et la fonction f définie sur $] -2 ; +\infty$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-4}{x-3} & \text{si } x < k \\ f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq k \end{cases}$$

- 1) a) Tracer les fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ et $x \mapsto \frac{x-4}{x-3}$ sur $x, y \in [-5 ; 5]$.
 b) Conjecturer la valeur de $k \in \mathbb{Z}$ pour laquelle f est continue sur \mathbb{R}
 2) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 21

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Tracer sur la fonction f pour x non nul sur $x, y \in [-5 ; 5]$.
 Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0?
 2) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 22

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Tracer sur la fonction f pour x non nul sur $x, y \in [-2 ; 2]$.
 Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0?
 2) Démontrer cette conjecture.

Continuité et suite**EXERCICE 23**

- 1) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 0, 1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.
 On admet que (u_n) est croissante et convergente vers ℓ . Déterminer ℓ .
 2) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$.
 On admet que (u_n) est convergente vers $\ell \geq 0$. Déterminer ℓ .
 3) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{4+u_n}$.
 On admet que (u_n) est minorée par 1 et convergente vers ℓ . Déterminer ℓ .

EXERCICE 24

On définit la suite (u_n) sur \mathbb{N} par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 1}$.

- 1) a) Écrire une fonction $u(n)$ en Python  renvoyant la valeur de u_n puis compléter le tableau (arrondir à 10^{-3}).

n	5	10	50	100	1 000
$u(n)$					

- b) Conjecturer la convergence de la suite (u_n) .
- 2) On peut montrer par récurrence que (u_n) est décroissante et positive.
- a) Justifier que la fonction associée f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- b) Montrer que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite ℓ .

EXERCICE 25

- 1) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{R} par : $u_0 = e^3$ et $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.
- a) On admet que (u_n) est minorée par 6 et convergente vers ℓ . Déterminer ℓ .
- b) Afficher la suite sur une calculatrice puis contrôler la valeur de ℓ trouvée.
- 2) Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{R} par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$.
- a) On admet que (v_n) est convergente vers ℓ . Déterminer ℓ .
- b) Afficher la suite sur une calculatrice puis contrôler la valeur de ℓ trouvée.

EXERCICE 26

Soit la fonction f définie sur $I = [0; 1]$ par : $f(x) = 2x(1 - x)$.

- 1) a) Justifier que f est continue sur I .
- b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I .
- c) Montrer que si $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
- d) Quelles sont les variations de f sur I ?
- 2) On définit la suite sur \mathbb{N} par : $u_0 = -0,1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
- a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est croissante et majorée sur I .
- b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ .

Continuité et dérivabilité

EXERCICE 27

\mathcal{C} est la courbe d'une fonction f . A est le point de \mathcal{C} d'abscisse 2.
On a tracé les éventuelles tangentes ou demi-tangentes à \mathcal{C} en A .

Dans chacun des 4 cas :

- donner $f(2)$

puis dites en se justifiant si la fonction f

- est continue en 2.

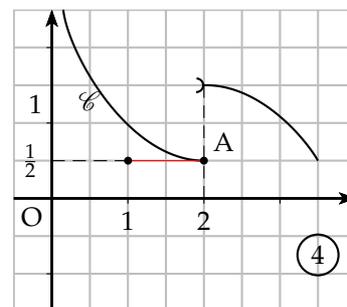
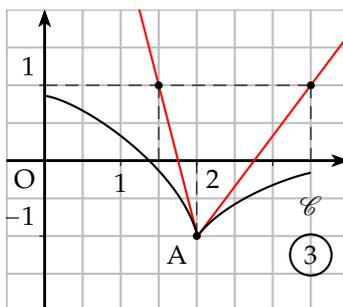
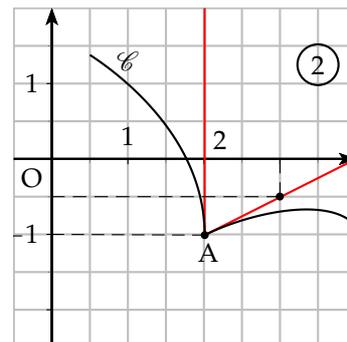
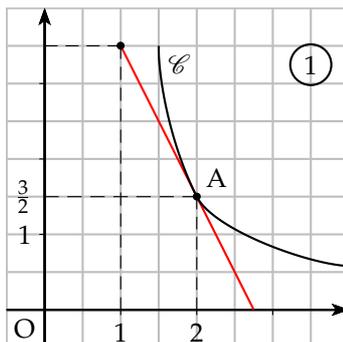
Si non continue à gauche?
à droite?

- est dérivable en 2.

Si oui que vaut $f'(2)$.

Si non, dérivable à gauche?
à droite?

Préciser les nombres dérivés à droite ou à gauche



EXERCICE 28

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) a) Tracer la fonction f sur une calculatrice sur $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-2 ; 5]$.
b) Conjecturer la dérivabilité sur \mathbb{R} . Justifier.

EXERCICE 29

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

- 1) Justifier que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
- 2) a) Tracer la fonction f sur une calculatrice sur $x \in [-4 ; 4]$ et $y \in [-2 ; 2]$.
b) Pourquoi la fonction semble-t-elle dérivable sur \mathbb{R} ?
c) Déterminer l'expression de f suivant le signe de x .
d) Justifier que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* .
e) Calculer les nombres dérivés en 0. Conclure.

Continuité et équation

EXERCICE 30

Soit la fonction f définie sur $[-2 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

- 1) Dresser le tableau de variations de la fonction f , on donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2 ; +\infty[$.

- b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2; +\infty[$.
Donner un encadrement, par balayage, au dixième près de α .

EXERCICE 31

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$.
- 2) Par l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à 10^{-3} de α

EXERCICE 32

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$.

- 1) Dresser le tableau de variations de la fonction f , on donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β , ($\alpha < \beta$) et que $\alpha \in [0; 1]$.
b) Par le balayage d'une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2} .

EXERCICE 33

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et continue sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	0	e^2	$-\infty$

- 1) Justifier que si $m \in]0; e^2[$ l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions sur \mathbb{R} .
- 2) Justifier que si $m \in]e^2; +\infty[$ l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution \mathbb{R} .

EXERCICE 34

On cherche le nombre de solutions de l'équation : (E) : $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 = 0$.

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$.

- 1) Justifier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 2) a) Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = x(x+2)(4x+1)$.
b) Calculer les limites de la fonction f en $\pm\infty$.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3) Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation (E).

EXERCICE 35**Vrai-Faux**

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$.

- 1) **Proposition 1** : « $x^3 - 3x + 3 = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} . »
- 2) **Proposition 2** : « La fonction f est dérivable sur $] \alpha ; +\infty[$. »
- 3) **Proposition 3** : « $\forall m \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = m$ admet une unique solution sur \mathbb{R} . »

Fonction auxiliaire

EXERCICE 36

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = [0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{10x}{e^x + 1}$.

- 1) Démontrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \frac{10}{(e^x + 1)^2} \times g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.
- 2) a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.
On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2} .
c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) En déduire le tableau de variations de f sur I . On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 37

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I =]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

- 1) Démontrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.
- 2) a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$ et donner un encadrement de α à 10^{-2} .
b) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeur de x .
c) En déduire le tableau de variations de f sur I .

EXERCICE 38

Soit la fonction f définie sur $I =]-2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x^3}{x+2}$.

- 1) a) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
b) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = -\frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$.
c) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$.
- 2) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -2 ; +\infty [$ puis montrer que $-1,5 < \alpha < 0$.
b) A l'aide de l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à 10^{-4} de α ainsi que le nombre de boucles nécessaires pour l'obtenir.

EXERCICE 39

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

Partie A

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

- 1) Déterminer les limites de g en $\pm\infty$.
- 2) Montrer que la fonction g est croissante sur \mathbb{R} .

- 3) a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} .
 b) Montrer que $\alpha \in [0 ; 1]$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
- 4) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

- 1) Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
 2) Déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$.
 3) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} puis dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
 4) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ puis déduire de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.
 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 5)]$.
 En déduire que la droite d d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.

Partie C

Pour tout naturel $n \geq 3$, on considère les points A_n , B_n et C_n d'abscisse n , appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite d et la courbe \mathcal{C}_f .

Soit u_n le réel défini par : $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$.

- 1) a) Démontrer que pour tout naturel $n \geq 3$, on a $u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$.
 b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
 c) Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 40**Approche d'une solution par une suite**

Le but de cet exercice est de démontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution dans \mathbb{R} et de construire une suite qui converge vers cette solution.

Partie A

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - e^{-x}$.

- 1) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$.
 2) a) Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 b) Montrer que f est croissante sur \mathbb{R} puis dresser son tableau de variations.
 c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} puis vérifier que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
 d) Quel est le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$?

Partie B

Soit la fonction g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

- 1) a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $g(x) = x$ avec $x \neq 0$.
 b) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$.
 En déduire que g est croissante sur $[0; \alpha]$.

- 2) On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
- a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
 - b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers α .
 - c) À l'aide d'une fonction $u(n)$ en Python  renvoyant la valeur de u_n , déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.