# Fonctions sinus et cosinus

## Rappels

### Exercice 1

Trouver les mesures principales puis les valeurs exactes du sinus et du cosinus des angles suivants.

1) $\dfrac{7\pi}{6}$ 3) $\dfrac{4\pi}{3}$ 5) $\dfrac{71\pi}{3}$ 7) $-\dfrac{107\pi}{4}$ 9) $-\dfrac{13\pi}{6}$

2) $\dfrac{9\pi}{4}$ 4) $\dfrac{11\pi}{6}$ 6) $\dfrac{81\pi}{4}$ 8) $-\dfrac{97\pi}{3}$ 10) $\dfrac{29\pi}{6}$

### Exercice 2

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle sur $\mathbb{R}$, puis représenter les solutions sur le cercle unité :

1) $2\sin x + 1 = 0$

2) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

3) $\cos(2x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

4) $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

5) $4\cos^2 x - 1 = 0$

6) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

### Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes sur $\text{I} = ]-\pi\,;\,\pi]$ et sur $\text{J} = [0\,;\,2\pi[$

1) $2\sin x + \sqrt{2} < 0$

2) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$

3) $2\sin x + 1 \geqslant 0$

4) $\sqrt{2}\cos x > 1$

### Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $]-\pi\,;\,\pi]$ :

1) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x$

2) $4\sin^2 x - 3 \leqslant 0$

3) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

4) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 \leqslant 0$

## Périodicité

### Exercice 5

Déterminer la plus petite périodicité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$

2) $f(x) = \sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right)$

3) $f(x) = 2 + 5\cos^2 x.$

4) $f(x) = 3\sin x + \sin 2x$

5) $f(x) = 5\cos\dfrac{x}{2}$

6) $f(x) = \sin x \cos x$

## Dérivées

### EXERCICE 6

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes en ayant auparavant déterminé un intervalle sur lequel le calcul est valable.

1) $f(x) = 2\sin x - x^2 \cos x$
2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
3) $f(x) = \cos^4 x$
4) $f(x) = \sqrt{3 + \cos x}$
5) $f(x) = \dfrac{2}{\cos x}$
6) $f(x) = \sin x + \sin^2 x$

## Étude de fonctions

### EXERCICE 7

$f$ est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2}{2 + \cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2) Montrer que la fonction $f$ est paire et déterminer sa période.
3) Calculer la fonction dérivée $f'$ et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi\,;\,3\pi]$

### EXERCICE 8

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos^2 2x + \cos 2x - 1$

1) Déterminer la période et la parité de la fonction $f$.
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction $f$.
3) Calculer la fonction dérivée $f'$ et déterminer son signe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$

## Fonction composée

### EXERCICE 9

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes en ayant auparavant déterminé un intervalle sur lequel le calcul est valable.

1) $f(x) = -3\cos 2x$
2) $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$
3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{2 + x^2}\right)$
4) $f(x) = \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$
5) $f(x) = e^{\cos x}$
6) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$

## EXERCICE 10

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(1 + \cos\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}$

1) Déterminer la période et la parité de la fonction $f$.
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction $f$.
3) Calculer la fonction dérivée $f'$ et déterminer son signe sur l'intervelle $[0\,;\,2\pi]$
4) Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'aide de la calculatrice sur $[-4\pi\,;\,4\pi]$

## EXERCICE 11

**Vrai-Faux**

$f$ est la fonction définie sur $\mathrm{I} = \left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \sin^2 x\cos 2x$

1) **Proposition 1 :** $\forall x \in \mathrm{I},\ \ f(x) \geqslant 0$
2) **Proposition 2 :** $\forall x \in \mathrm{I},\ \ f'(x) = \sin 2x(1 - 4\sin^2 x)$
3) **Proposition 3 :** La fonction $f$ est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$
4) **Proposition 4 :** La fonction $f$ est décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;-\dfrac{\pi}{6}\right]$
5) **Proposition 5 :** $\forall x \in \mathrm{I},\ \ f(x) \leqslant \dfrac{1}{8}$

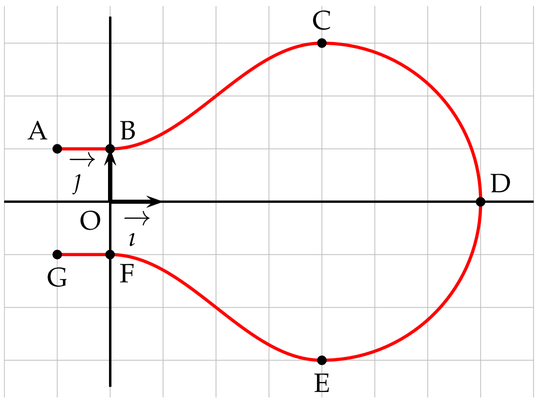
## EXERCICE 12

On s'intéresse à la modélisation d'une ampoule basse consommation dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .
Soit les points :

A$(-1\,;\,1)$, B$(0;1)$, C$(4;3)$, D$(7;0)$,

E$(4\,;-3)$, F$(0\,;-1)$ et G$(-1\,;-1)$.

On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-contre :




La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose en :

- une portion située entre les points A et B est correspond à une fonction $h$ définie sur $[-1\,;\,0]$ par : $h(x) = 1$ ;
- une portion située entre les points B et C correspond à une fonction $f$ définie sur $[0;4]$ par : $f(x) = a + b\sin\left(c + \dfrac{\pi}{4}x\right)$, avec $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ;
- une portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en-dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1) a) Déterminer $f'(x)$ sur $[0\,;\,4]$.

b) On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction $f$ soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel $c$.

2) Déterminer les réels $a$ et $b$.