Les fonctions sinus et cosinus

Dérivabilité

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$ $x \longmapsto \sin(x)$

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$ $x \longmapsto \cos(x)$

sin et cos sont dérivables donc continues sur $\mathbb{R}$.

- $\sin' x = +\cos x$
- $\cos' x = -\sin x$

Dérivées de la composée

Soit u une fonction dérivable sur I

$$\sin \circ u \,:\, x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\sin} \sin[u(x)]$$

$$\cos \circ u \,:\, x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\cos} \cos[u(x)]$$

$\sin \circ u$ et $\cos \circ u$ sont dérivables sur I et

- $\forall x \in \mathrm{I},\quad (\sin \circ u)'(x) = +u'(x)\cos[u(x)]$
- $\forall x \in \mathrm{I},\quad (\cos \circ u)'(x) = -u'(x)\sin[u(x)]$

Exemple : $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \;\Rightarrow\; f'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Valeurs remarquables

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1

Formules élémentaires

- sin et cos sont bornées $\begin{cases} -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- De sinus à cosinus :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Intervalle d'étude

sin et cos sont 2π-périodique et respectivement impaire et paire, on peut restreindre leur intervalle d'étude à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
On complète ensuite sur $[-\pi\,;\,0]$ par symétrie.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x$			$-$		
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Périodicité et parité

1) sin et cos sont 2π-périodique :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$
   - $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

2)
   - La fonction sin est impaire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin(-x) = -\sin x$
     $\mathscr{C}_{\sin}$ admet l'origine O pour centre de symétrie.
   - La fonction cos est paire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(-x) = \cos x$
     $\mathscr{C}_{\cos}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Limites utiles

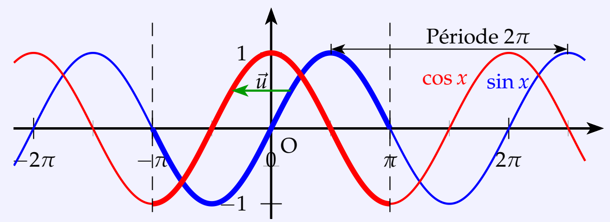
Limites qui reviennent aux nombres dérivés en 0 :

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

Application : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$

Courbes représentatives

- Les courbes de sin et cos sont des sinusoïdes.
- On déduit la sinusoïde de cos par une translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sin.



Compléments

Les angles associés :

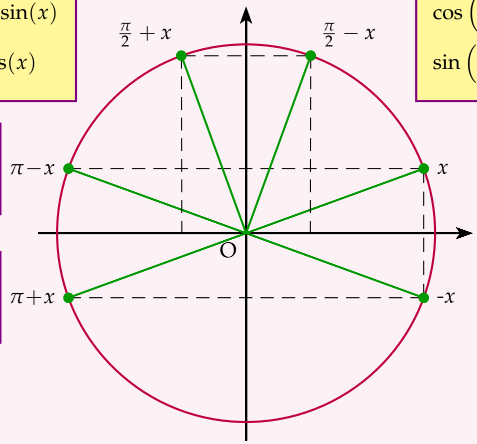
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi-x) = \sin(x)$

$\cos(\pi+x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi+x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$



Formules d'addition :

- Avec sinus on panache :
  $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
  $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
- Avec cosinus on ne panache pas :
  $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
  $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

Formules de duplication :

- $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
  $= 2\cos^2 a - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 a$

La fonction tangente

On pose $\tan\ :\ x \longmapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

- $D_f = \{x\in\mathbb{R},\ \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
- La fonction tan est dérivable sur D_f :
  $\tan' x = \left(\dfrac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \dfrac{\cos^2+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
  La fonction tangente est strictement croissante sur D_f
- La fonction tan est π-périodique car :
  $\forall x\in D_f,\ \ \tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
- La fonction tan est impaire : $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(x)} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$
  $\mathscr{C}_{\tan}$ est symétrique par rapport à l'origine O.
- On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle : $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
- Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$		$+$	$\Vert$
$\tan x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$ $\Vert$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x = 1\\ \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x = 0^+\end{array}\right\}\ \text{Par quotient}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x = +\infty$$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_{\tan}$

- On obtient la courbe $\mathscr{C}_{\tan}$ suivante :