Calcul intégral

Mesurer une surface plane délimitée par une ou plusieurs courbes.

Table des matières

-

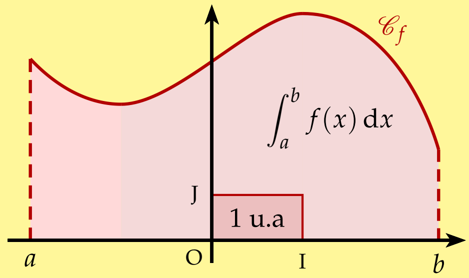
1 Intégrale d'une fonction continue positive

1.1 Définition

Définition 1 : Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
On appelle

- **Unité d'aire (u.a.)** : l'aire du rectangle construit à partir des points O, I et J.
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Ce qui se traduit par :
$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$
- **Intégrale de f sur $[a\,;\,b]$** : la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$.

  On note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Remarque :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit : « somme ou intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- La variable "x" est une variable muette, c'est à dire qu'elle n'est plus présente lorsque le calcul est effectué. Elle peut être remplacée par : t, u, ou toute autre lettre à l'exception de a et b.

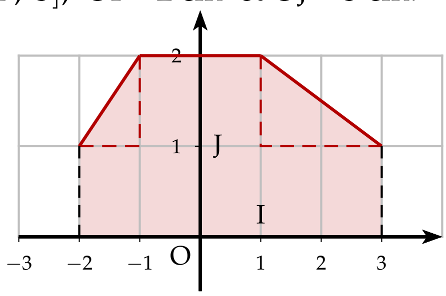
  On peut ainsi écrire indistinctement : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,\ \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$

Exemple : Soit la courbe d'une fonction f sur $[-2\,;\,3]$, OI = 2 cm et OJ = 3 cm.
L'unité d'aire vaut : $2 \times 3 = 6$ cm^2.

Pour calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$,

on s'aide du quadrillage, on a :

- 7 rectangles pleins
- un demi rectangle en haut à gauche
- un triangle en haut à droite de côté respectifs 2 et 1 soit $\dfrac{2 \times 1}{2} = 1$ rectangle.



On a alors : $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 8,5$ et l'aire du domaine $\mathscr{A} = 8,5 \times 6 = 51$ cm^2.

Dans le cas général d'une fonction dont la représentation n'est pas une ligne brisée mais une courbe, on ne peut plus utiliser cette méthode de quadrillage. On encadre alors l'aire entre deux séries de rectangles. C'est l'objet de paragraphe suivant : méthode des rectangles.

1.2 Méthode des rectangles : la quadrature de la parabole

Définition 2 : Quadrature de la parabole.
La quadrature de la parabole est le calcul de l'aire de la surface délimitée par un segment de parabole et une droite.

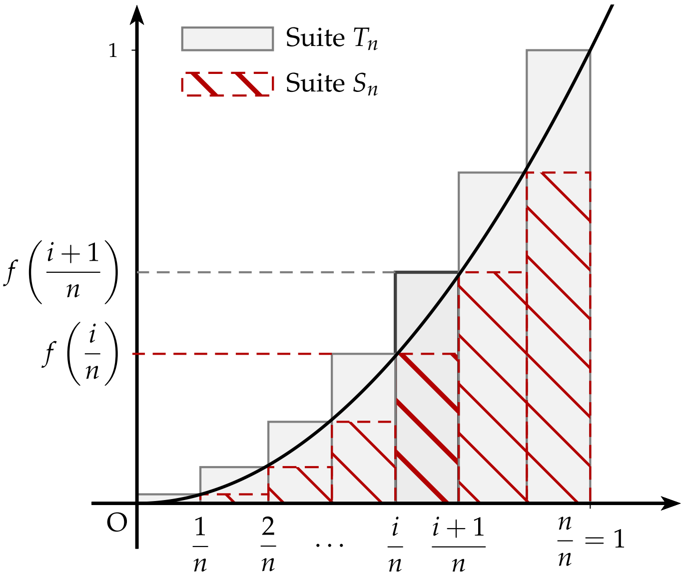
Exemple : Encadrer l'aire $\mathscr{A}$ sous la parabole de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[0\,;\,1]$.
L'idée de Riemann est d'encadrer cette aire par deux séries de rectangles :

On divise $[0\,;1]$ en n parties.

Sur $\left[\dfrac{i}{n}\,;\,\dfrac{i+1}{n}\right]$, comme f est croissante :

- la valeur minimale est $f\left(\dfrac{i}{n}\right)$ et
- la valeur maximale $f\left(\dfrac{i+1}{n}\right)$.
- On obtient 2 rectangles de largeur $\dfrac{1}{n}$ et de hauteurs $f\left(\dfrac{i}{n}\right)$ et $f\left(\dfrac{i+1}{n}\right)$.

Soit S_n et T_n la somme des aires respectives des rectangles inférieurs et des rectangles supérieurs



Algorithme : On automatise le calcul avec le programme en Python suivant :

Pour A(100), on a : $0,328\,35 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0,338\,35$

Pour A(1000), on a : $0,332\,83 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0,333\,83$

Pour A(10000), on a : $0,333\,28 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 0,333\,38$

```
def f(x):
    return x**2
def A(n):
    s=0 ; t=0
    for i in range(n)
        s=s+1/n*f(i/n)
        t=t+1/n*f((i+1)/n)
    return s,t
```

Les suites (S_n) et (T_n) semblent converger vers 0,333 3... soit $\dfrac{1}{3}$

Démonstration : Montrons que (S_n) et (T_n) convergent vers la même limite.

- $S_n = \dfrac{1}{n}\left[0^2 + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right] = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$
- $T_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right] = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = S_n + \dfrac{1}{n}$

On peut montrer par récurrence que : $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

En appliquant cette formule à l'ordre $n-1$, on obtient :

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)n\,[2(n-1)+1]}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

On a alors : $S_n = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \dfrac{2n^3-3n^2+1}{6n^3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2} = 0$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$

$T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$

Or $S_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant T_n$, d'après le th. des gendarmes : $\mathscr{A} = \dfrac{1}{3}$ u.a. d'où $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

La calculatrice ti 83 : $\displaystyle\int_0^1 X^2\,dX$ ▶ Frac donne bien le résultat trouvé.

1.3 Intégrale d'une fonction continue positive

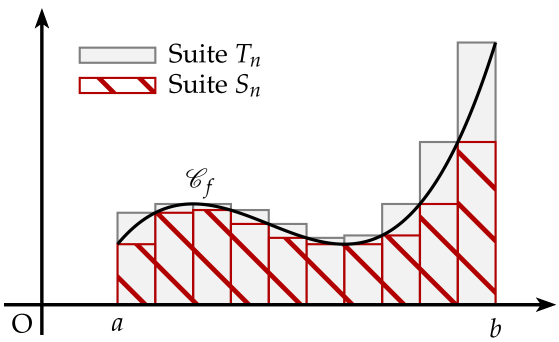
Théorème 1 : Intégrale d'une fonction f continue et positive sur $\mathrm{I} = [a\,;\,b]$.

- On divise I en n parties égales.
- Sur $\left[a + \dfrac{(b-a)i}{n}\,;\, a + \dfrac{(b-a)(i+1)}{n}\right]$, on détermine les valeurs minimales et maximales de f.
- L'aire sous la courbe est alors encadrée par deux suites (S_n) et (T_n) correspondantes à l'aire des rectangles inférieurs et l'aire des rectangles supérieurs.

(S_n) et (T_n) convergent vers la même limite correspondant à l'intégrale de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = \mathscr{A}$$

Remarque : Le symbole dx dans l'intégrale est une notation différentielle qui symbolise une très petite distance et représente la largeur de chaque petit rectangle. $f(x)\,dx$ représente l'aire d'un rectangle et le symbole $\int$ devant signifie que l'on fait la somme des aires de chaque petit rectangle.



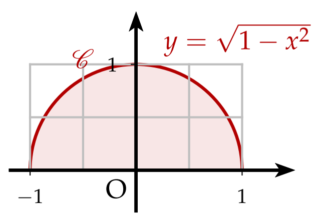
Exemple : Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

$y = \sqrt{1-x^2} \overset{\uparrow(2)}{\Rightarrow} y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\mathscr{C}$ est le demi-cercle de centre O et de rayon 1 ($y \geqslant 0$).

L'intégrale est l'aire du demi-disque de rayon 1 soit $\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$



1.4 Définition cinématique de l'intégrale

On a donné une définition géométrique de l'intégrale, on peut aussi en donner une définition cinématique. Pour un mobile se déplaçant sur un axe à la vitesse $v(t)$, la distance d parcourue par le mobile entre les instants t_1 et t_2 vaut :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

2 Intégrale et primitive

2.1 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème 2 : Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F telle que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f s'annulant en a.

Démonstration : Dans le cas où f est croissante sur $[a;b]$.

On revient à la définition de la dérivée, il faut montrer que si $x_0 \in [a;b]$:

$$F' = f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

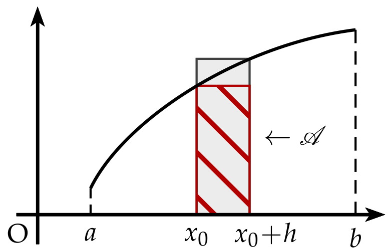
- $h > 0$, par soustraction d'aire on a :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{A}$$

f est croissante sur $[a;b]$, donc si $t \in [x_0\,;\,x_0+h]$:

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h)$$

donc en encadrant l'aire $\mathscr{A}$ par le rectangle inférieur (hachuré) et le rectangle supérieur (gris), on a :



$$f(x_0) \times h \leqslant \mathscr{A} \leqslant f(x_0+h) \times h \overset{\div h}{\Leftrightarrow} f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

- $h < 0$, on montre de même que : $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$

- On sait que f est continue sur $[a;b]$, donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

  D'après le théorème des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

- Si $x = a$, l'aire d'un segment étant nulle, on a bien $F(a) = 0$.

Remarque : Ce théorème est essentiel car il permet de calculer une intégrale par une primitive.

2.2 Existence de primitives

Théorème 3 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Démonstration : Dans le cas où f est continue sur un intervalle fermé $\mathrm{I} = [a;b]$.
f admet alors un minimum m, donc $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant m$
Soit la fonction g telle que : $g(x) = f(x) - m$

g est continue (car somme de fonctions continues) et positive sur $[a;b]$.

Soit $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, d'après le th. fondamental, G est une primitive de g sur I.

La fonction F définie sur I par : $F(x) = G(x) + mx$ est une primitive de f car :

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$$

Remarque : On admet ce théorème pour tout intervalle de $\mathbb{R}$.

2.3 Calcul d'une intégrale à partir d'une primitive

⚠ On étend la validité du théorème fondamental aux fonctions continues non nécessairement positives.

Théorème 4 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive quelconque de f, alors pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration : Si f est continue sur I alors f admet une primitive G sur I qui s'annule en a. On a alors pour tous réels a et b de I :

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(b)$$

Soit F une primitive de f sur I, il existe alors $k \in \mathbb{R}$ tel que : $F(x) = G(x) + k$.

On a alors : $F(a) = k$ et $G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$.

Conclusion : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Exemples :

1) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x$

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} - 4 \times 2 + 3 \times 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 - 3\right)$$
$$= \frac{8}{3} - 8 + 6 + \frac{1}{3} + 2 + 3 = 6$$

2) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

$$\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{3}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2} \times \frac{-1}{x^2+1}\right]_0^2 = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{6}{5}$$

2.4 Intégration par parties

Théorème 5 : Le principe

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$ de dérivées u' et v' continues, alors :

$$\int_a^b uv'(x)\,\mathrm{d}x = \big[uv(x)\big]_a^b - \int_a^b u'v(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : si u et v sont dérivables sur $[a;b]$ alors, uv est dérivable et :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad uv' = (uv)' - u'v$$

Comme u' et v' sont continues, on peut intégrer l'égalité, d'où :

$$\begin{aligned}\int_a^b uv'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left[(uv)'(x) - u'v(x)\right]\,\mathrm{d}x \overset{\text{linéarité}}{=} \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[uv(x)\big]_a^b - \int_a^b u'v(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2.5 Exemples d'intégration par parties

Le choix de u et v' est stratégique. Il faut pouvoir trouver une primitive de $u'v$

1) **Intégrale.** Calculer : $\displaystyle\int_0^1 x\,e^x\,\mathrm{d}x$

On ne peut trouver une primitive de $x \mapsto x\,e^x$ car non de la forme $u'e^u$.
Le "x" devant l'exponentielle est en trop. On intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x\,e^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,e^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1 = (e-0) - (e-1) = 1$$

2) **Primitive.** Déterminer une primitive de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

Soit F la primitive de ln qui s'annule en 1. On a alors : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$.

La primitive de ln n'est pas connue, on décompose $\ln t$ en : $\ln t = 1 \times \ln t$.

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln t & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= 1 & v(t) &= t \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t\Big]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = \Big[t\ln t\Big]_1^x - \Big[t\Big]_1^x = x\ln x - x + 1$$

La primitive G de $\ln x$ de constante d'intégration nulle : $G(x) = x\ln x - x$.

Remarque : Bien noter l'astuce consistant à décomposer $\ln t = 1 \times \ln t$.

On peut être amené à effectuer une double intégration par parties, lorsque la primitive de $u'v$ nécessite elle-même une intégration par parties.

3) **Double intégration.** Calculer $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (1+t)^2 e^{2t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On cherche à faire disparaître le polynôme devant l'exponentielle.

$$\begin{aligned} u(t) &= (1+t)^2 & u'(t) &= 2(1+t) \\ v'(t) &= e^{2t} & v(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^{x} (1+t)^2 e^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(1+t)^2 e^{2t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} (1+t)e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - \underbrace{\int_{-1}^{x} (1+t)e^{2t}\,\mathrm{d}t}_{=I} \end{aligned}$$

Pour calculer I, on fait de nouveau une intégration par parties, on pose alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= 1+t & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^{2t} & v(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2}(1+t)e^{2t}\right]_{-1}^{x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

On obtient finalement pour $F(x)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - I = \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \\ &= \frac{1}{4}(2+4x+2x^2-2-2x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} = \frac{1}{4}(2x^2+2x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

3 Propriétés de l'intégrale

3.1 Propriétés vectorielles

Propriété 1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I alors :

1) $\forall a \in \mathrm{I}$, $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

2) $\forall a, b \in \mathrm{I}$, $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3) **Relation de Chasles :** $\forall a, b, c \in \mathrm{I}$, $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

Remarque : On retrouve des relations similaires avec les vecteurs :

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

Démonstration : Ces propriétés découlent immédiatement du calcul à partir d'une primitive F de f. Par exemple pour la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque : Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un intervalle centrée :

- Si une fonction est paire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

- Si une fonction est impaire, alors d'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Théorème 6 : **Linéarité de l'intégrale**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, alors :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : Soit F et G primitives respectives de f et g, on a alors :

$$\begin{aligned}\alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \alpha[F(b) - F(a)] + \beta[G(b) - G(a)]\\ &= \underbrace{[\alpha F + \beta G](b) - [\alpha F + \beta G](a)}_{\text{linéarité de la primitive}} = \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Exemple : On donne $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ et $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 (5f - 3g)(x)\mathrm{d}x = 5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$.

3.2 Intégrales et inégalités

Théorème 7 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $\mathrm{I} = [a;b]$.

- **Positivité :** $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- **Intégration d'une inégalité :** $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- **Inégalité de la moyenne :** Soit $m \leqslant M \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathrm{I},\ m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Remarque : Ces propriétés sont des implications. Les réciproques sont fausses.

Démonstration :

- Positivité : si $f \geqslant 0$ alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire sous $\mathscr{C}_f$, donc positive.
- Si $f \geqslant g$, alors $f - g \geqslant 0$ donc d'après la positivité : $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

  De la linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

  On en déduit alors que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- Inégalité de la moyenne : de l'encadrement de f, en intégrant les inégalités :

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \;\Rightarrow\; \int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow\; \Big[mx\Big]_a^b \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \Big[Mx\Big]_a^b \;\Rightarrow\; m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Exemple : Donner un encadrement de $I = \displaystyle\int_1^9 \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}_{=f(x)}\,\mathrm{d}x$.

On encadre la fonction f sur $[1\,;9]$:

$$1 \leqslant x \leqslant 9 \;\overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Rightarrow}\; 1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3 \;\overset{+1}{\Rightarrow}\; 2 \leqslant 1+\sqrt{x} \leqslant 4 \;\overset{\uparrow(-1)\searrow}{\Rightarrow}\; \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2}$$

On applique ensuite l'inégalité de la moyenne :

$$\frac{1}{4}(9-1) \leqslant \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(9-1) \;\Rightarrow\; 2 \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant 4 \;\Rightarrow\; 2 \leqslant I \leqslant 4$$

4 Intégrale et aire. Valeur moyenne

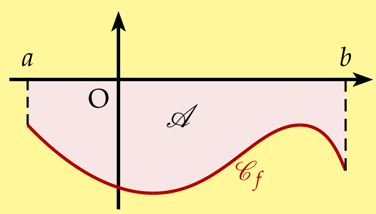
4.1 Intégrale et aire

Propriété 2 : Relation entre aire et intégrale

- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f \leqslant 0$.

  Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

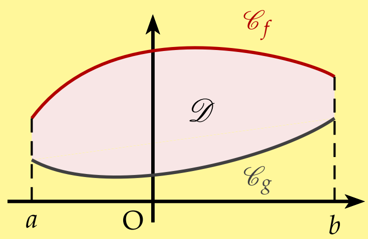
$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



- Soit deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$.

  Soit $\mathscr{D}$ l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathscr{D} = \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$$

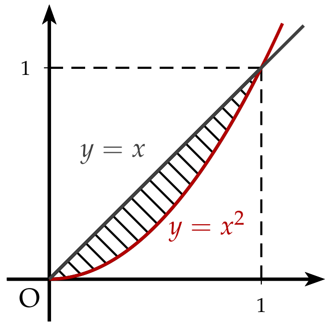


Démonstration : La 1re propriété se montre par symétrie avec l'axe des abscisses. La deuxième propriété est directement liée à la soustraction de deux aires.

Exemple : Trouver l'aire comprise entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = x$ entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$

Comme la parabole est en dessous de la droite :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$



Remarque : Pourvu que l'on connaisse l'expression algébrique du contour d'une surface par des fonctions continues, on peut déterminer l'aire de cette surface.

4.2 Valeur moyenne

Définition 3 : Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque :

- Transposition continue de la moyenne de n valeurs discrètes (x_i) :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{à comparer avec} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- **Cinématique**. On peut définir la vitesse moyenne V d'un mobile entre les instants t_1 et t_2 dont la vitesse instantanée est $v(t)$:

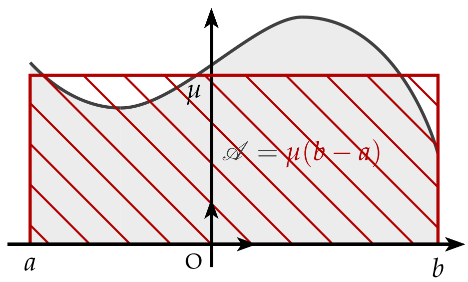
$$V = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$$

- **Interprétation graphique.**

  Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$:

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

  L'aire $\mathscr{A}$ est égale à l'aire du rectangle hachuré



Exemple : Calculer la valeur moyenne μ de la fonction sinus sur $[0\,;\,\pi]$.

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$$