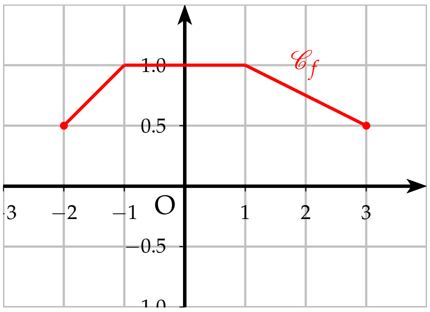
Calcul intégral

Notion d'intégrale

EXERCICE 1

Pour chaque fonction affine définie par morceaux f, représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale I de f sur l'intervalle de définition de f.



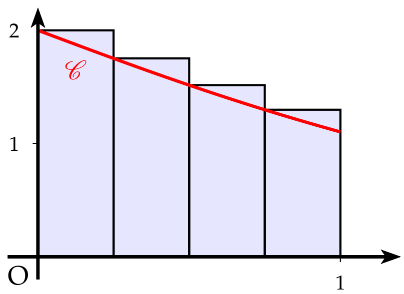
EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

1) On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur $\left[0\,;\,\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur $\left[\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur $\left[\frac{3}{4}\,;\,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$



L'algorithme en Python ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents.

```python
from math import*
def f(x):
    return (x+2)*exp(-x)
s=0
for i in range(4):
    s=s+1/4*f(1/4*i)
print(s)
```

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme. S'agit-il d'une valeur par excès ou par défaut ?

2) Dans cette question, n est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en n intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 1).

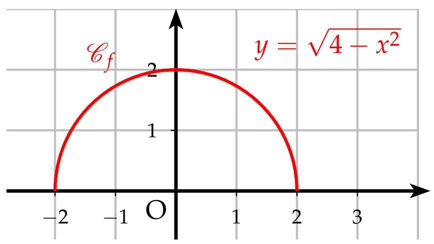
Créer une fonction $s(n)$ en Python afin qu'elle affiche en sortie la somme des aires des n rectangles ainsi construits. Faites le calcul pour $n = 100$.

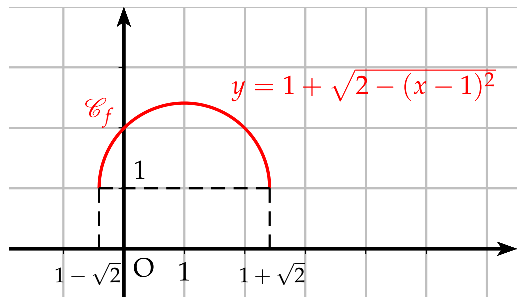
3) Vérifier le résultat, sur la calculatrice, de l'intégrale de f de 0 à 1. Quelle est l'erreur commise en prenant $n = 4$, valeur trouvée en 1).

Exercice 3

Dans chaque cas, la fonction f est représentée par sa courbe $\mathscr{C}_f$, dont une équation est indiquée.

1) Prouver que $\mathscr{C}_f$ est un demi-cercle. Préciser son centre et son rayon.
2) En déduire l'intégrale I de f sur son intervalle de définition. En donner ensuite une valeur approchée puis vérifier le résultat sur votre calculette.





Exercice 4

Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -x+3 & \text{si } \ 0 < x \leqslant 3 \\ x-3 & \text{si } \ 3 < x \leqslant 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} & \text{si } \ 1 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

1) Tracer séparément les fonctions f et g
2) Calculer les intégrales I et J sur $[-1\,;\,5]$ de f et g.
3) En déduire les intégrales sur $[-1\,;\,5]$ des fonctions $f+4g$ et $5f-2g$

Calcul d'intégrale

Exercice 5

Calculer les suivantes à l'aide d'une primitive :

1) $I = \displaystyle\int_0^4 (x-3)\,\mathrm{d}x$
2) $I = \displaystyle\int_{-1}^2 (t^2-4t+3)\,\mathrm{d}t$
3) $I = \displaystyle\int_1^2 \left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$
4) $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$
5) $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,\mathrm{d}x$
6) $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{(2t+1)^2}$

EXERCICE 6

Calculer les suivantes à l'aide d'une primitive :

1) $I = \displaystyle\int_0^4 \mathrm{d}x$

2) $I = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,\mathrm{d}x$

3) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

4) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{3x-2}\,\mathrm{d}x$

5) $I = \displaystyle\int_0^1 5e^{3x}\,\mathrm{d}x$

6) $I = \displaystyle\int_0^1 te^{t^2-1}\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 7

1) a) Trouver trois réel a, b et c tels que : $\dfrac{4x^2+7x+1}{x+2} = ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{4x^2+7x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x$

2) a) Prouver que pour tout réel x : $\dfrac{1}{1+e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

Intégration par parties

EXERCICE 8

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1) $I = \displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

2) $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \ln t\,\mathrm{d}t$

3) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (x-1)\cos x\,\mathrm{d}x$

4) $I = \displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x\,\mathrm{d}x$

5) $I = \displaystyle\int_1^2 (t-2)e^{2t}\,\mathrm{d}t$

6) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 9

Trouver la primitive F sur I et nulle en a, des fonctions f suivantes à l'aide d'une intégration par partie

1) $f(t) = \ln(t^2)$ $\quad \mathrm{I} =]0;+\infty[\quad a = 1$

2) $f(t) = (2t+1)\sin t \quad \mathrm{I} = \mathbb{R} \quad a = 0$

3) $f(t) = (t+1)^2 e^{2t} \quad \mathrm{I} = \mathbb{R} \quad a = -1$ (on fera deux intégrations par partie).

4) $f(t) = (\ln t)^2 \quad \mathrm{I} =]0;+\infty[\quad a = 1$ (on fera deux intégrations par partie).

5) $f(t) = e^{-2t}\cos t \quad \mathrm{I} = \mathbb{R} \quad a = 0$ (on fera deux intégrations par partie).

Encadrement et valeur moyenne

EXERCICE 10

Comparer sans calcul : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 x\,e^x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_1^2 x^2\,e^x\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 11

Démontrer les encadrements suivants :

1) $2 \leqslant \displaystyle\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant 4$

2) $\sqrt{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

3) $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$

4) $2e^{-4} \leqslant \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

5) $2\ln 3 \leqslant \displaystyle\int_2^4 \ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$

EXERCICE 12

On donne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{2\,e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$

1) Déterminer une primitive de f.
2) Calculer la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[50\,;\,100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2}.

EXERCICE 13

Soit la valeur moyenne $\mu = 2$ d'une fonction f sur $[1\,;4]$. Calculer $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 14

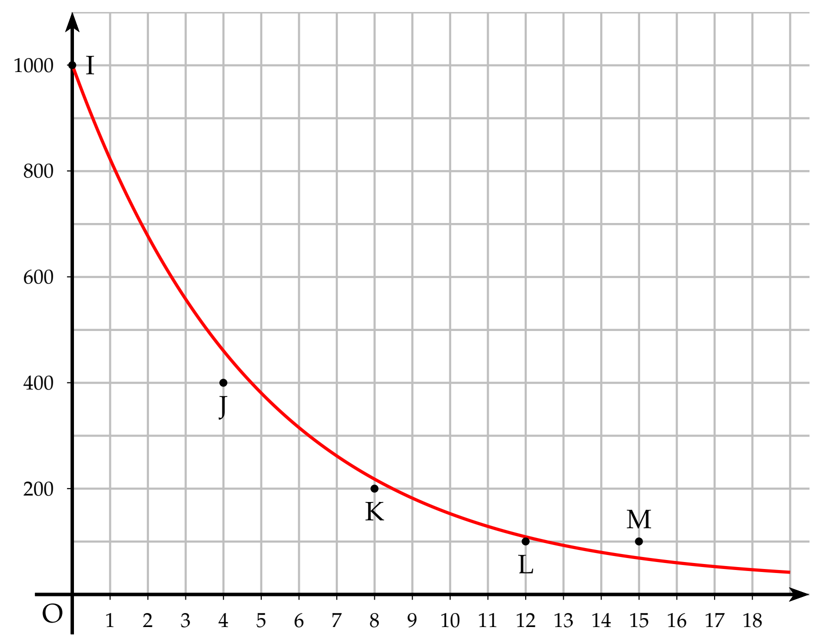
Calculer la valeur moyenne μ sur $[-1\,;\,1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Aide : on pourra penser au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 15

Soit la fonction f définie par : $f(t) = 980\,e^{-\frac{t}{5}} + 20$.

1) À l'aide de la représentation graphique de f ci-après, donner une estimation de la valeur moyenne μ de f sur $[0\,;15]$.
   On pourra s'aider des points I, J, K, L et M.



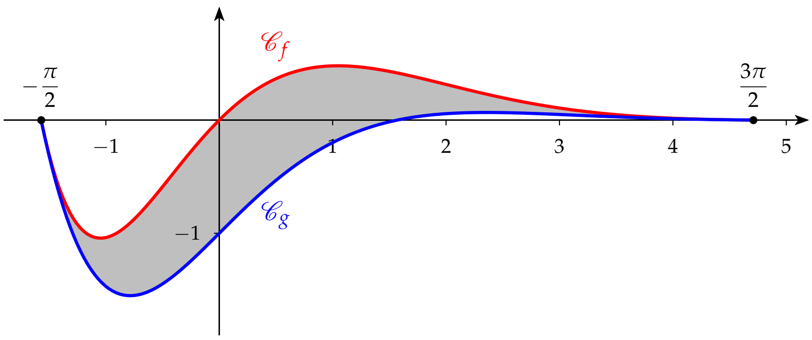
2) Déterminer la valeur exacte de la valeur moyenne μ de f sur $[0\ ;\ 15]$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} à comparer à la valeur obtenue à la question 1).

Aire et intégrale

Exercice 16

Un publicitaire souhaite imprimer un logo sur un T-shirt. Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ :\ \frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x}\cos x.$$



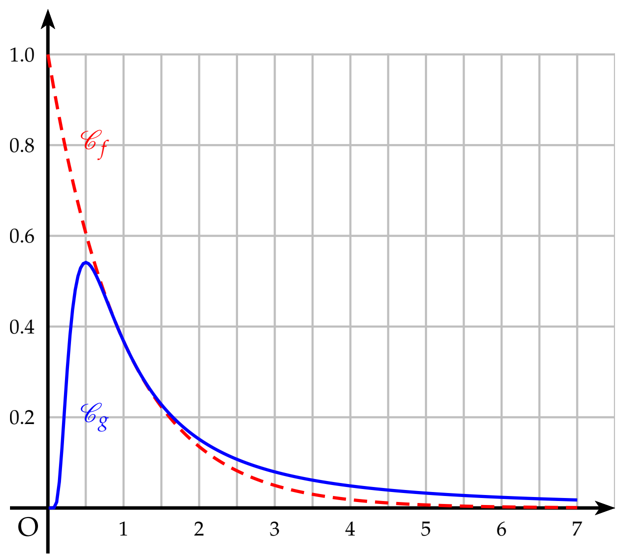
1) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad h(x) = e^{-x}\sin x$.
   Déterminer une primitive de h à l'aide de deux intégrations par parties.
2) Sachant que l'unité graphique est 2 cm sur le deux axes, déterminer l'aire exacte du logo puis une valeur approchée à 10^{-2} cm² près.

Exercice 17

Soit f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}}$$

1) Conjecturer graphiquement la résolution de l'équation $g'(x) = 0$.
2) Montrer que, $g'(x) = \dfrac{1-2x}{x^4} \times e^{-\frac{1}{x}}$.
   Confirmer le résultat du 1).
3) Démontrer que le point $\mathrm{A}\left(1\ ;\ e^{-1}\right)$ est un point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



On admet que A est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ et en dessous sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

4) Soit $a, b \in]0\,;+\infty[$, montrer que $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = e^{-a} + e^{-\frac{1}{a}} - e^{-b} - e^{-\frac{1}{b}}$.

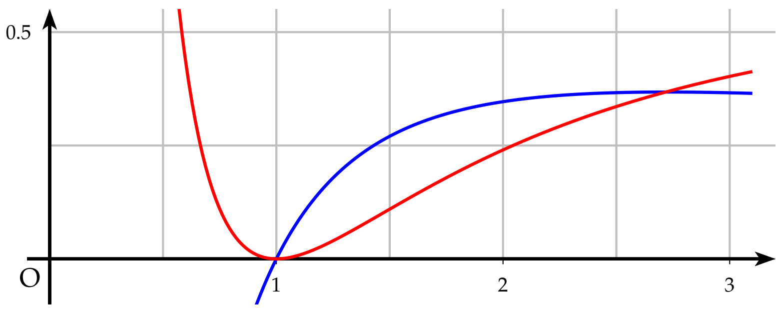
5) Démontrer que : $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 1-2e^{-1}$.

6) Montrer que : $\displaystyle\lim_{b\to +\infty}\int_1^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$
Interpréter graphiquement cette égalité.

EXERCICE 18

Soit deux fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ et $g(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbe respectives des fonction f et g.

1) Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
2) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3) On a tracé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en cm² de la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et par les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. L'unité est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 4 cm sur l'axe des ordonnées.



EXERCICE 19

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x$ et $g(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$

1) a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.
   b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Intégrale et suite

EXERCICE 20

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n=\displaystyle\int_0^1 (1+t^n)\,\mathrm{d}t$

1) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2) Est-elle convergente ?

EXERCICE 21

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

1) a) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

b) La suite (I_n) est-elle convergente ? Si oui vers quelle limite ?

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 22

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2} \mathrm{d}x$

1) a) Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2}$.
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b) En déduire la valeur de I_1.

c) On admet que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_{n+2} = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{n+1}{2} I_n$
Calculer I_3 et I_5.

2) Soit l'algorithme en Python suivant :

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?
Quelle est sa valeur ?

```
from math import*
n=1
u=1/2*exp(1)-1/2
while n<21:
    u=1/2*exp(1)-(n+1)/2*u
    n=n+2
print(u)
```

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4) Déterminer la valeur de ℓ. On pourra raisonner par l'absurde.

EXERCICE 23

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$.

1) Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x$.

2) a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3) a) Recopier et compléter la fonction Python ci-contre afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n).

```
from math import*
def u(n):
    u=...
    for i in range(1,...):
        u=...
    return u
```

b) Rentrer la fonction dans votre calculatrice et compléter le tableau suivant :

n	0	1	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9				

Quelles conjectures sur le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

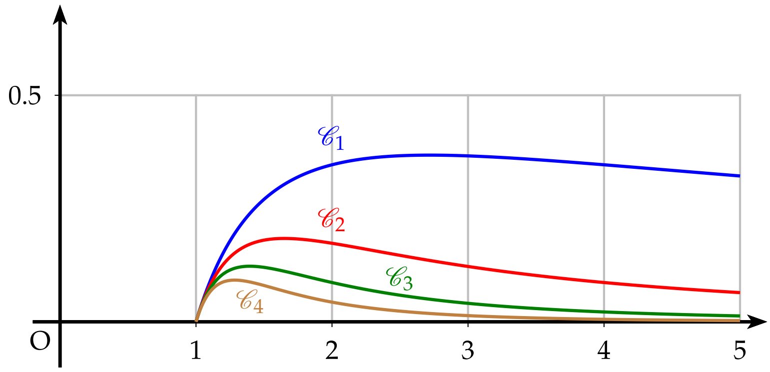
4) a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.
   c) Démontrer que $\ell = 0$.

EXERCICE 24

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n définies sur [1 ; 5J par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour $n \in \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$.



1) Conjecturer la limite de l'aire délimitée par $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 5$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1\,;\,5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln 5}{x^n}$.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$.
   c) Démontrer la conjecture de la question 1.

EXERCICE 25

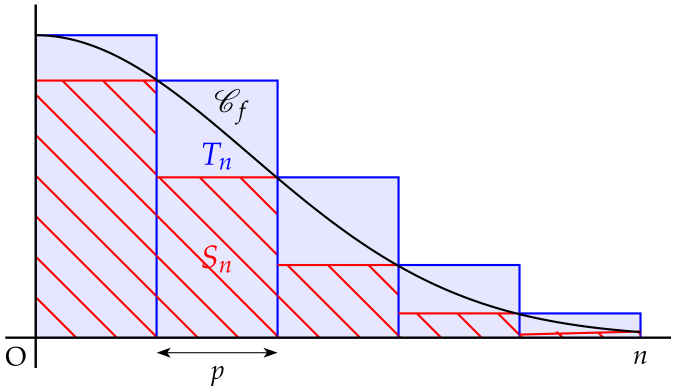
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \dfrac{e}{2}$.
3) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n) ?
4) On admet que la suite est convergente vers ℓ.
   Pour déterminer une valeur approchée de ℓ, on découpe l'aire sous la courbe de la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$ en bande de largeur p donné sur l'intervalle $[0\,;\,n]$. On obtient deux séries de rectangles d'aires respectives S_n et T_n. S_n étant l'aire des rectangles inférieure à (u_n) et T_n l'aire supérieure. On prend comme valeur approchée $\dfrac{S_n + T_n}{2}$

Recopier et compléter la fonction I(n,p) en Python donnant la valeur de $\dfrac{S_n + T_n}{2}$ pour n et p donnés :

```
from math import*
def I(n,p):
    s=0
    t=0
    for i in range(...):
        s=...
        t=...
    return (s+t)/2
```



Déterminer une valeur approchée de ℓ en prenant $n = 5$ et $p = 0.01$. Comparer cette valeur à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

EXERCICE 26

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. On réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour $t \in [0\,;\,20]$ par :

$$f(t) = (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

$f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1) Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   a) Calculer $f(20)$.
   b) Déterminer le taux maximal de CO_2 pendant l'expérience.
2) On veut que le taux de CO_2 retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   a) Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   b) On considère l'algorithme suivant :
   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

Entrées et initialisation
  $t \leftarrow 1,75$
  $p \leftarrow 0,1$
  $V \leftarrow 0,7$
Traitement
  tant que $V > 0,035$ **faire**
    $t \leftarrow t + p$
    $V \leftarrow f(t)$
  fin

3) On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

   a) Soit F définie sur $[0\,;11]$ par : $F(t) = (-1,6t - 3,6)e^{-0,5t} + 0,03t$
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;11]$.

   b) En déduire le taux moyen V_m, valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;11]$. Arrondir le résultat au millième, soit à $0,1\,\%$.