Dénombrement

Langage des ensembles

EXERCICE 1

1) Écrire en extension l'ensemble des nombres de 4 chiffres distincts formés à partir des chiffres du nombre 4 932.
2) Écrire les ensembles suivants en compréhension :
   a) E : ensemble des entiers relatifs impairs
   b) F : ensemble des entiers naturels divisible par 7.
   c) G : ensemble des fractions d'entiers relatifs dont le dénominateur est une puissance de 3.

EXERCICE 2

Écrire l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble E = $\{a, b, c, d, e\}$

EXERCICE 3

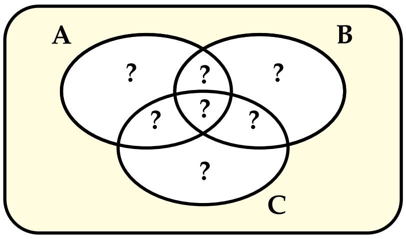
Diagramme de Venn : relations entre trois ensembles.

Trois revue scientifiques A, B et C sont mises à la disposition des élève d'un lycée. On sait que :

- 52 % ont lu A, 43 % ont lu B et 37 % ont lu C ;
- 22 % ont lu A et B, 15 % ont lu A et C et 13 % ont lu B et C ;
- 8 % ont lu les trois revues.

On interroge un élève au hasard.

1) Compléter le diagramme de Venn suivant : mettre un nombre à la place de "?"
2) Quel est le pourcentage
   a) Que l'élève ait lu seulement une revue ?
   b) Que l'élève n'ait lu aucune revue ?



EXERCICE 4

Un lycée compte 150 élèves en terminale. 110 sont des filles, dont 40 suivent la spécialité maths. Par ailleurs, 20 garçons ne la suivent pas. On appelle F l'ensemble des filles et M l'ensemble des élèves suivants la spécialité maths.

1) a) Représenter les données par un tableau à double entrée et le compléter.
   b) Quelle est la proportion des filles dans la spécialité maths.
2) Représenter les données à l'aide d'un diagramme de Venn.

EXERCICE 5

On donne l'ensemble E = $\{a, b\}$ et F = $\{1, 2, 3\}$
Écrire tous les éléments de E $\times$ F

Factorielles

Exercice 6

Simplifier les écritures sans utiliser la calculatrice.

1) $\dfrac{21!}{20!}$ 2) $\dfrac{17!}{15!}$ 3) $\dfrac{6!-5!}{5!}$ 4) $\dfrac{6\times 4!}{5!}$ 5) $\dfrac{7!\times 5!}{10!}$

6) $\dfrac{1}{5!}-\dfrac{42}{7!}$ 7) $\dfrac{6!}{3!\times 3!}$ 8) $\dfrac{9!}{5!\times 4!}$ 9) $\dfrac{9!}{6!\times 3!}$ 10) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

11) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ 12) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$ 13) $\dfrac{(n-1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n+1)!}$

Exercice 7

Donner une autre écriture des nombres suivants à l'aide de factorielles :

1) $A = 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10$ 2) $B = \dfrac{9\times 8\times 7\times 6\times 5}{3\times 2}$

3) $C = n(n+1)(n+2)$

Exercice 8

Sans calculatrice, déterminer les nombres suivants :

$A = \dbinom{6}{2}$ $B = \dbinom{12}{8}$ $C = \dfrac{\dbinom{7}{5}}{\dbinom{9}{6}}$ $D = \dfrac{\dbinom{5}{3}\times\dbinom{6}{4}}{\dbinom{9}{3}}$.

Exercice 9

Montrer pour $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant n$ que : $n\times\dbinom{n-1}{p-1} = p\times\dbinom{n}{p}$.

Exercice 10

Déterminer l'entier n satisfaisant la condition indiquée

1) $\dbinom{n}{2} = 36$ 2) $3\times\dbinom{n}{4} = 14\times\dbinom{n}{2}$

Tirages successifs avec remise

Exercice 11

1) Combien existe-t-il de codes, de quatre chiffres, pour une carte bancaire ?
2) Combien existe-t-il de numéros de téléphone commençant par 06 05 – – – ?

Exercice 12

L'entrée d'un immeuble est commandée par un digicode qui possède 10 chiffres et 4 lettres. Un code comporte cinq éléments : trois chiffres suivis de deux lettres.

1) Combien y a-t-il de codes possibles ?
2) Combien de codes commencent par le chiffre 0 ?
3) Combien de codes commencent par trois chiffres identiques ?
4) Combien de codes ont deux lettres identiques ?

EXERCICE 13

On jette un dé à 6 faces, trois fois de suite et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1) Quel est le nombre de résultats possibles ?
2) Quel est le nombre de résultats comportant 3 chiffres identiques
3) Quel est le nombre de résultats comportant 3 chiffres distincts deux à deux
4) Quel est le nombre de résultats comportant seulement 2 chiffres identiques.

EXERCICE 14

On répartit trois chemises de couleurs distinctes dans quatre tiroirs a, b, c, d.

1) Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
2) Déterminer le nombre de répartitions des événements suivants :
   a) A : « toutes les chemises sont dans le tiroir a » ;
   b) B : « toutes les chemises sont dans le même tiroir » ;
   c) C : « les tiroirs b et c sont vides ».

Tirages successifs sans remise

EXERCICE 15

Écrire toutes les permutations de l'ensemble : $\mathrm{E} = \{a, b, c, d\}$

EXERCICE 16

Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire.
Combien de comités différents peut-elle élire ?

EXERCICE 17

1) Dans un meeting d'athlétisme, la finale de saut en longueur comprend douze athlètes ; il n'y a pas d'ex-æquo. Combien existe-t-il de classements possibles ?
2) La finale du 100 m plat comprend huit athlètes ; tous arrivent et il n'y a pas d'ex-æquo. Combien existe-t-il d'arrivées dans l'ordre des trois premiers ?

EXERCICE 18

1) a) Combien peut-on former d'anagrammes du mot « LAINE » ?
   b) Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?
2) Reprenez les deux questions précédentes avec le mot « BALEINE ».

Tirages simultanés

Exercice 19

Dix-huit personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

Exercice 20

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

1) Combien de façons y a-t-il de constituer ce groupe ?
2) Combien y en a-t-il ne comportant que des hommes ?
3) Combien y en a-t-il ne comportant que des personnes de même sexe ?
4) Combien y en a-t-il comportant au moins une femme et au moins un homme ?

Exercice 21

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. On tire au hasard trois boules simultanément. **Sans calculatrice** :

1) déterminer le nombre de tirages possibles.
2) déterminer le nombre de tirages comportant :
   a) 3 boules de la même couleur ?
   b) 1 boule de chaque couleur ?
   c) 3 boules de deux couleurs différentes seulement ?

Exercice 22

Une urne A contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 5 boules rouges.
Une urne B contient 4 boules vertes.
On tire simultanément deux boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B, puis on tire trois boules simultanément de l'urne B.

Sans calculatrice déterminer le nombre de tirages tricolores possibles.

Exercice 23

Au jeu du 421, on jette trois dés simultanément. Le but est de réaliser des combinaisons qui rapportent un certain nombre de points. Le plus grand score est obtenu avec 421 et le plus petit avec 221. Un brelan est d'obtenir 3 dés identiques.

1) a) De combien de façons peut-on obtenir le plus grand score ?
   b) De combien de façons peut-on obtenir le plus petit score ?
   c) De combien de façons peut-on obtenir un brelan ?
2) **Sans calculatrice** déterminer le nombre de configurations dans un lancé simultané de trois dés.

Tirages

Exercice 24

Sur un damier « 4×4 » de seize cases, on place quatre jetons de même couleur sur quatre cases différentes. De combien de façons peut-on les disposer ?

Si les jetons étaient de couleurs différentes, de combien de façons pourraient-on les disposer ?

EXERCICE 25

Chaque semaine, un jeu de Loto sportif propose une grille avec 15 rencontres de football. Le jeu consiste à pronostiquer les résultats des 7 premiers matchs de la liste (jeu à 7) ou des 15 matchs (jeu à 15). Pour chaque match, trois réponses sont possibles : l'équipe 1 gagne (réponse « 1 »), les équipes 1 et 2 font match nul (réponse « N »), l'équipe 2 gagne (réponse « 2 »).

Le parieur coche une seule des trois cases | 1 | N | 2 |

1) De combien de façons différentes, peut-on remplir une grille pour le jeu à 7 et pour le jeu à 15 ?
2) Pour le jeu à 7, on « gagne» à partir de 6 réponses exactes et pour le jeu à 15 à partir de 12 réponses exactes. Combien y a-t-il de grilles gagnantes pour le jeu à 7 et pour le jeu à 15 ?

EXERCICE 26

Le jeu de Master Mind® se joue à deux joueurs. Un joueur dispose cinq pions dans cinq trous, les pions sont choisies parmi huit couleurs, et le joueur dispose de cinq pions de chaque couleur. L'autre joueur doit deviner la disposition choisie par l'autre.

1) Combien de dispositions peut-on constituer ?
2) On place au plus cinq pions dans les cinq trous (certains trous peuvent rester vides). Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
3) Le constructeur annonce 59 049 combinaisons possibles. Est-ce justifié ?

EXERCICE 27

On dispose d'un jeu de 32 cartes formé des cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as dans chacune des quatre couleurs trèfle, carreau, cœur et pique.

1) Combien de mains de 5 cartes peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant :
   a) exactement un roi, une dame et 2 valets ?
   b) l'as de pique et au moins 2 trèfles ?
   c) exactement un roi et deux carreaux ?

EXERCICE 28

On dispose d'un jeu de 32 cartes formé des cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as dans chacune des quatre couleurs trèfle, carreau, cœur et pique.

On distribue des mains de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

1) un carré : quatre cartes de la même valeur ?
2) une paire : deux cartes uniquement de même valeur ?
3) une double paire : deux paires distinctes ?
4) un full : trois cartes de même valeur et un paire de valeur différente ?

5) un brelan : trois cartes de même valeur, sans full, ni carré ?

EXERCICE 29

On donne la fonction Python f suivante :

```
1  from random import*
2  def f(n,p)
3      L=[i for i in range(1,n+1)]
4      for i in range(p):
5          d=randint(1,n)
6          a=L[d-1]
7          L[d-1]=L[n-1]
8          L[n-1]=a
9          n=n-1
10     return L[n:n+p+1]
```

On rappelle que les listes sont indexées à partir de 0 et que L[a :b] correspond aux valeurs de la liste L indexées de a à b.

1) À la ligne 3 que contient la liste L ?
2) À la ligne 5 à quoi correspond la valeur d ?
3) Que fait-on aux lignes 6, 7 et 8.
4) À la ligne 10 que renvoie la fonction f ?
5) Quelle est le but de la fonction f ? Comment procède t-elle ?
6) Rentrer cette fonction dans la calculatrice.
   Tester la fonction f avec : $f(10, 3)$, $f(10, 1)$, $f(10, 9)$.