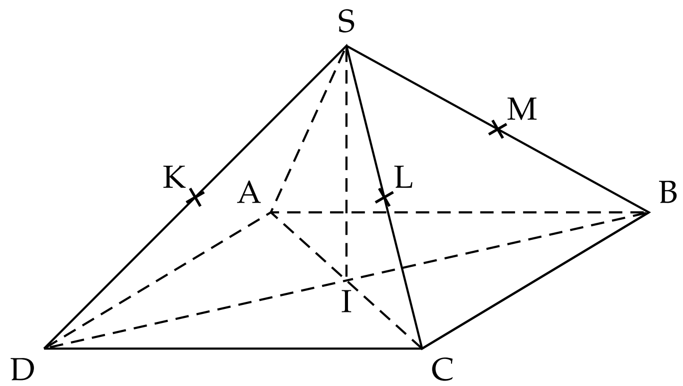
Vecteurs, droites et plans dans l'espace

EXERCICE 1

QCM



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS $= 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1) Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

On se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{IC}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{IB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.

2) Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

3) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases}x=-1-t\\y=t\\z=-t\end{cases}\ ,\ t\in\mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=0\\z=1+2t\end{cases}\ ,\ t\in\mathbb{R}$

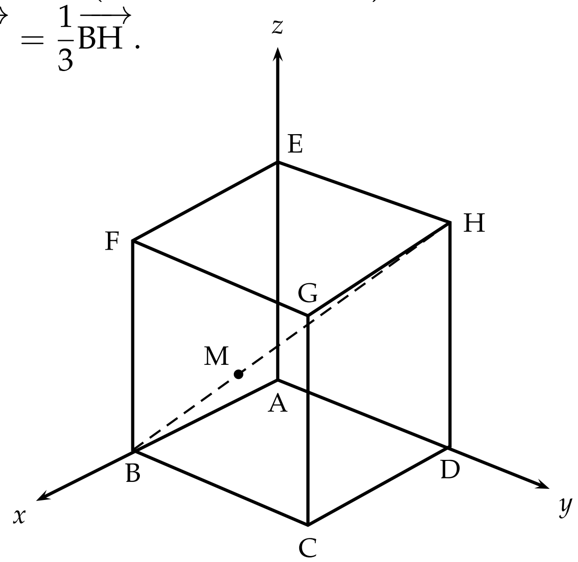
c. $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1+t\end{cases}\ ,\ t\in\mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases}x=-1-t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}\ ,\ t\in\mathbb{R}$

EXERCICE 2

Polynésie 2021

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2) a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.
Déterminer l'aire du triangle EGD.

3) Déterminer les coordonnées de M.

EXERCICE 3

QCM

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère :

- La droite d passant par les points $A(1\,;\,1\,;\,-2)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,2)$.
- La droite d' de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = \quad 6-3t \\ z = \quad 8-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite d' ?

a. $M_1(-1\,;3\,;-2)$ **b.** $M_2(11\,;-9\,;-22)$ **c.** $M_3(-7\,;9\,;2)$ **d.** $M_4(-2\,;3\,;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite d'est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites d et d' sont :

a. sécantes

b. strictement parallèles

c. non coplanaires

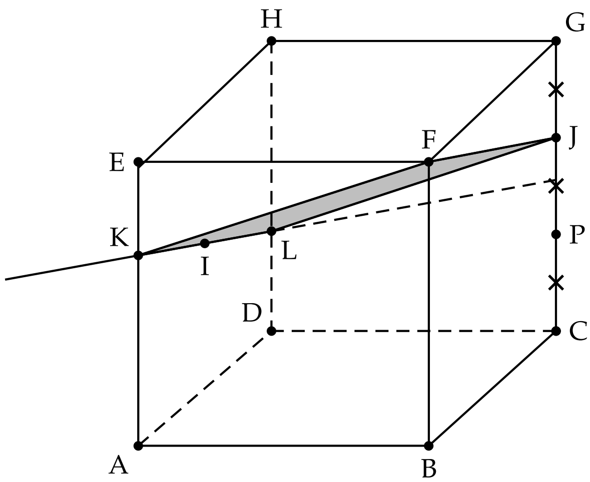
d. confondues

EXERCICE 4

Centre étrangers 2021

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG]. Il existe donc $a \in [0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.
On note d la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(A\,;\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$



1) Donner les coordonnées des points F, I et J.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
3) a) Déterminer les coordonnées du point K.
   b) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites d et (DH).
4) a) Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
   b) Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.
   c) Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On rappelle que $a \in [0\,;\,1]$.

1) Déterminer les coordonnées de J et de K en fonction de a.
2) Montrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
3) Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.
4) Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un carré ? Justifier.