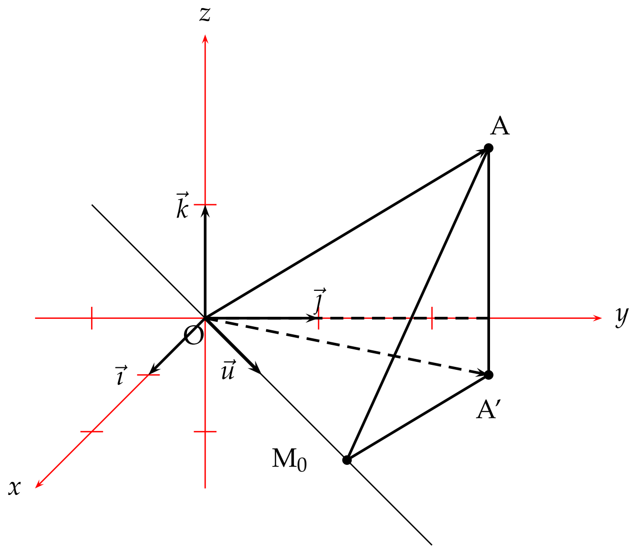
Annales sur la géométrie dans l'espace

EXERCICE 1

Métropole 7 juin 2021

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2) Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,0)$.
   a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;2\,;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3) Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4) On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5) Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide associé à cette base.

EXERCICE 2

Métropole 8 juin 2021

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère :

- La droite d passant par les points $\mathrm{A}(1\,;1\,;-2)$ et $\mathrm{B}(-1\,;3\,;2)$.
- La droite d' de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = 6-3t \\ z = 8-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- Le plan (P) d'équation cartésienne $x+my-2z+8=0$ où $m \in \mathbb{R}$.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite d' ?

a. $\mathrm{M}_1(-1\,;3\,;-2)$ **b.** $\mathrm{M}_2(11\,;-9\,;-22)$ **c.** $\mathrm{M}_3(-7\,;9\,;2)$ **d.** $\mathrm{M}_4(-2\,;3\,;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite d'est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites d et d' sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles
c. non coplanaires **d.** confondues

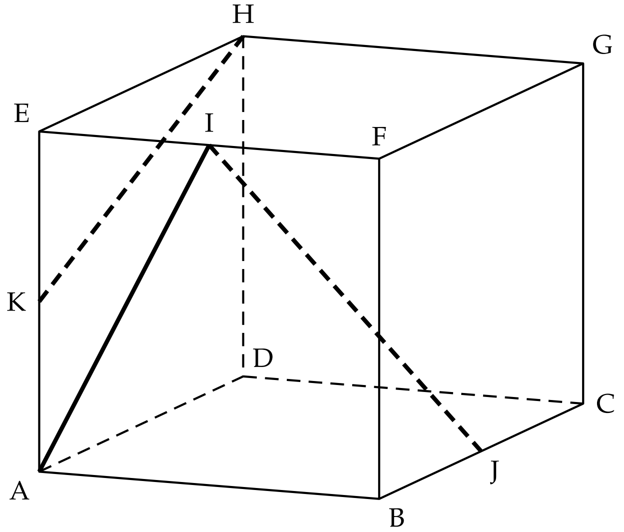
Question 4 : La valeur de m pour laquelle la droite d est parallèle au plan (P) est :

a. $m=-1$ **b.** $m=1$ **c.** $m=5$ **d.** $m=-2$

Exercice 3

Amérique du Nord mai 2021

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1) Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2) a) Donner les coordonnées des points I et J.

   b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan (P) d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1\ :\ \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2\ :\ \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

3) Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4) Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5) Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan (P).