Annales sur la géométrie dans l'espace

EXERCICE 1

Maison

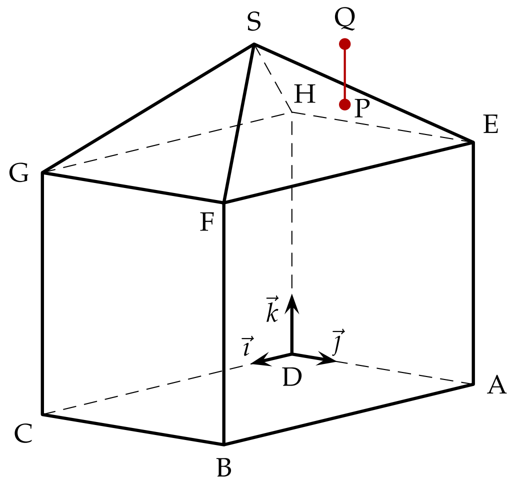
Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS. On a DC = 6, DA = DH = 4.

Soit les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DH}$

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(D\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.



1) Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.
2) Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$
3) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.
4) On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment [PQ]. On dispose des données suivantes :
   - le point P appartient au plan (EFS) ;
   - le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
   - la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{k}$.

   a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :
   $$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5,5 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) En déduire les coordonnées du point P.

c) En déduire la longueur PQ de l'antenne.

5) Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = \quad 7 - 4s \\ z = \quad 2 + 4s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment [PQ] ?

EXERCICE 2

Centre Étrangers mai 2022

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points

$$A(3\,;\,-2\,;\,2),\ \ B(6\,;\,1\,;\,5),\ \ C(6\,;\,-2\,;\,-1)\ \text{ et }\ D(0\,;\,4\,;\,-1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{A} \times h$
où $\mathscr{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1) Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

3) On considère le point H(5 ; 0 ; 1).

a) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.

b) Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

c) En déduire la distance du point A au plan (BCD).

4) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.