Séance révision du 25 mai 2021

EXERCICE 1

Fonction exp

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2) Déterminer la fonction dérivée f' sur $]0\,;\,+\infty[$
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4) Soit $m \in \mathbb{R}$. Préciser et justifier, en fonction des valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5) On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   Soit A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   a) Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
   b) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   En déduire les variations de g sur $[0\,;+\infty[$
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;+\infty[$.
   d) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   e) Par balayage sur la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} de a.

EXERCICE 2

Suites

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$

Dans l'exercice, on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

1) a) Calculez u_1 et v_1.
   b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geqslant 1$.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant n+1$.
   d) En déduire la limite de la suite (u_n).
2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$ et on admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

b) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

c) Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $r_{n+1} = \dfrac{2 + r_n}{1 + r_n}$.

e) On considère le programme suivant écrit en Python :

```python
from math import*
def seuil():
    n=0
    r=1
    while abs(r-sqrt(2))>10**(-4):
        r=(2+r)/(1+r)
        n=n+1
    return n
```

Quelle est la valeur de n renvoyée ? À quoi correspond-elle ?

EXERCICE 3

Probabilité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Dans notre séance, on justifiera les réponses mais à l'épreuve cela n'est pas demandé.

Partie I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

1) Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

2) La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible, à 10^{-2} près, vaut :

   a. 0 **b.** 1 **c.** $0,24$ **d.** $0,76$

3) La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles vaut :

   a. $\dbinom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\dbinom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

   c. $\dbinom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\dbinom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

4) La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible vaut :

   a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ **b.** $1 - P(X = 0)$

Partie II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

5) La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé est égale à :

a. $\dfrac{5}{8}$ **b.** $\dfrac{4}{7}$ **c.** $\dfrac{5}{14}$ **d.** $\dfrac{20}{56}$

6) La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

a. $\dfrac{5}{8}$ **b.** $\dfrac{5}{7}$ **c.** $\dfrac{3}{28}$ **d.** $\dfrac{9}{7}$

EXERCICE 4

Probabilité

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école ».

1) Traduire la situation par un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3) Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.
4) On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1) On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école vaut 0,24.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2) Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?