Séance révision suites du 11 avril 2022

Exercice 1

Suites adjacentes

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$ et $v_0 = 5$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer u_1 et v_1.
2) On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = u_n - v_n$.
   a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
   b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
   b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).
   On admet que la suite (v_n) est croissante et on remarque qu'on a alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \geqslant v_0 = 5$.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4) a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
   b) On considère la suite (c_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n = 100$.
   c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.
5) Programmer ces suites en Python permettant de retrouver ce résultat.

Exercice 2

Suite homographique

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{4x}{1+3x}$.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Calculer u_1.
2) a) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3) a) Recopier et compléter la fonction Python qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E):
    u=0.5
    n=0
    while .......:
        u=......
        n=n+1
    return n
```

b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

4) Soit la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

c) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{1 + 0,25^n}$.
Retrouver, par le calcul, la limite de la suite (u_n).