# Séance révision fonctions du 13 avril 2022

## EXERCICE 1

**Fonction exp**

**Partie I**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-2x}$.

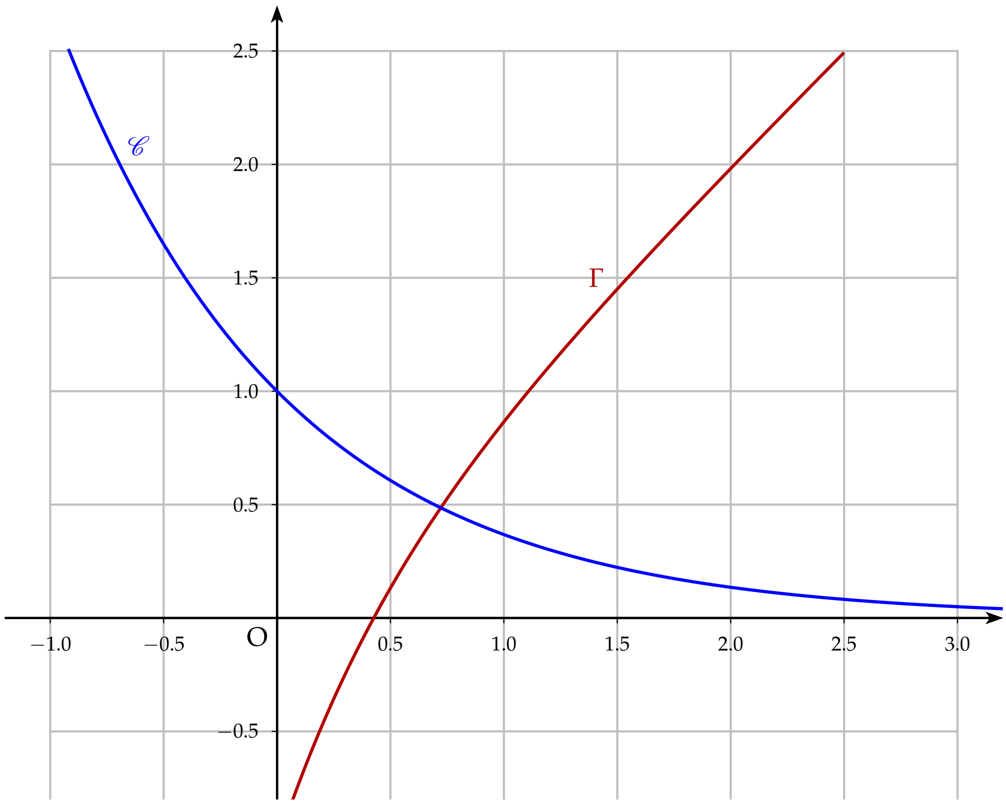
On appelle $\Gamma$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

1) Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Étudier le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
4) Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**Partie II**

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ , on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}$.

La courbes $\mathscr{C}$ et la courbe $\Gamma$ (qui représente la fonction $f$ de la Partie I) sont tracées sur le **graphique** suivant :




Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note M le point de coordonnées $(t\,;\,e^{-t})$ de la courbe $\mathscr{C}$.

   On considère la fonction $h$ qui, à $t \in \mathbb{R}$, associe la distance OM.

   On a donc : $h(t) = \text{OM}$, c'est-à-dire : $h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}$.

b) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\ ;\ e^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.

Placer ce point sur le **graphique**.

2) On appelle $T$ la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

a) Exprimer en fonction de $\alpha$ le coefficient directeur de la tangente $T$.
On rappelle :

- que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.
- le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
« Dans un repère orthonormé, deux droites $d$ et $d'$ de coefficients directeurs $m$ et $m'$ sont perpendiculaires si, et seulement $mm' = -1$. »

b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente $T$ sont perpendiculaires.
Tracer ces droites sur le **graphique**.

## EXERCICE 2

**Fonction ln**

**Partie 1**

Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

On admet que $h$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note $h'$ sa fonction dérivée.

1) Déterminez les limites de $h$ en 0 et en $+\infty$.

2) Montrer que, pour tout $x \in ]0\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.

3) En déduire les variations de $h$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in ]0\ ;\ +\infty[$ et vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

5) Déterminer le signe de $h(x)$ pour $x \in ]0\ ;\ +\infty[$.

**Partie 2**

On désigne par $f_1$ et $f_2$ les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques de $f_1$ et $f_2$ dans $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

1) Montrer que, pour tout $x \in ]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f_1(x) - f_2(x) = h(x)$.

2) Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha\ ;\ \alpha)$.