Séance révision géométrie dans l'espace

Exercice 1

Polynésie, sujet 1, mai 2022

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points $A(2\,;-1\,;\,0)$ $B(1\,;\,0\,;-3)$, $C(6\,;\,6\,;\,1)$ et $E(1\,;\,2\,;\,4)$;
- Le plan (P) d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1) a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.
   c) En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.
2) a) Démontrer que le plan (P) est parallèle au plan (ABC).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.
   d) Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.
3) On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16,5$ unités de volume.

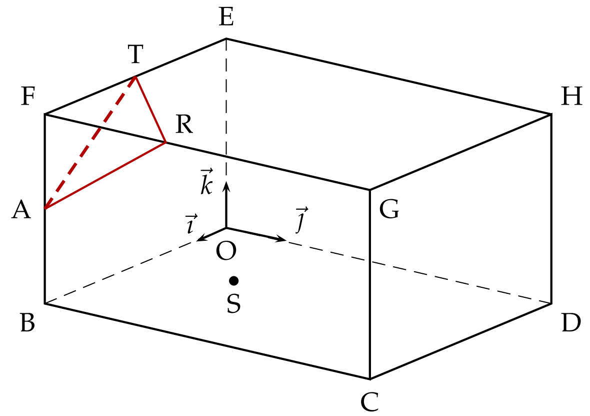
Exercice 2

Amérique du Nord, sujet 2, mai 2022

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.
Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où :

$$\text{OB} = 6 \text{ m}, \quad \text{OD} = 8 \text{ m} \quad \text{et} \quad \text{OE} = 4 \text{ m}$$

Soit le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que $\vec{\imath} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{OD}$, $\vec{k} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier C(6 ; 8 ; 0), F(6 ; 0 ; 4) et G(6 ; 8 ; 4).
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets A(6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4) et T(3 ; 0 ; 4). Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$.

1) a) Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.

   c) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

2) a) Justifier que le vecteur $\vec{n}(2\,;-2\,;\,3)$ est un vecteur normal au plan (ART).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

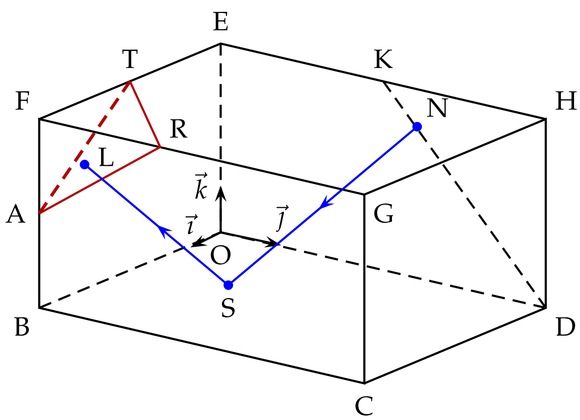
3) Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

   a) Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
   Justifier que le système suivant est une représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \dfrac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

   b) Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).
   Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,3\right)$.

4) L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH].
   Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



   a) Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$, le point N de coordonnées $(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$ est un point du segment [DK].

   b) Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.