Séance révision géométrie dans l'espace, probabilité et QCM

Exercice 1

QCM (Centre Étrangers sujet 2 mars 2023)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.
Une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est définie par :

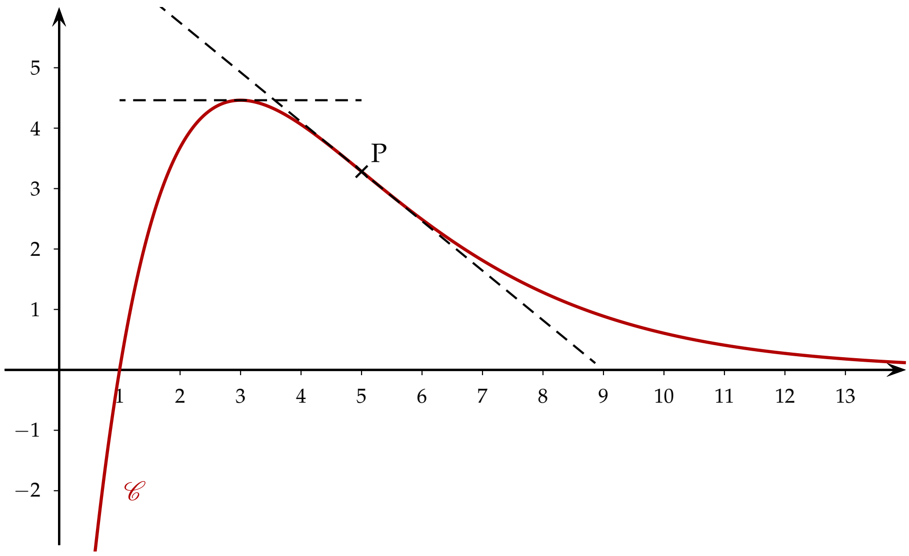
a) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x$

b) $F(x) = (x-1)e^x$

c) $F(x) = (x+1)e^x$

d) $F(x) = \dfrac{2}{x}e^{x^2}$.

2) La courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



a) pour tout $x \in]0\,;5[$: $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

b) pour tout $x \in]5\,;+\infty[$: $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

c) pour tout $x \in]0\,;5[$: $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

d) pour tout $x \in]5\,;+\infty[$: $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

3) Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{a}{b+e^{-t}}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$.

Les valeurs de a et b sont :

a) $a = 2$ et $b = 3$

b) $a = 4$ et $b = \dfrac{4}{3}$

c) $a = 4$ et $b = 1$

d) $a = 6$ et $b = 2$

4) Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher.
L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges.
L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.
Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte. La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{5}{8}$

5) On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100}$.
Parmi les scripts Python, celui qui permet de calculer la somme S est :

a)
```
def somme_a():
    S=0
    for k in range(100):
        S=1/(k+1)
    return S
```

c)
```
def somme_c():
    k=0
    while S<100 :
        S=S+1/(k+1)
    return S
```

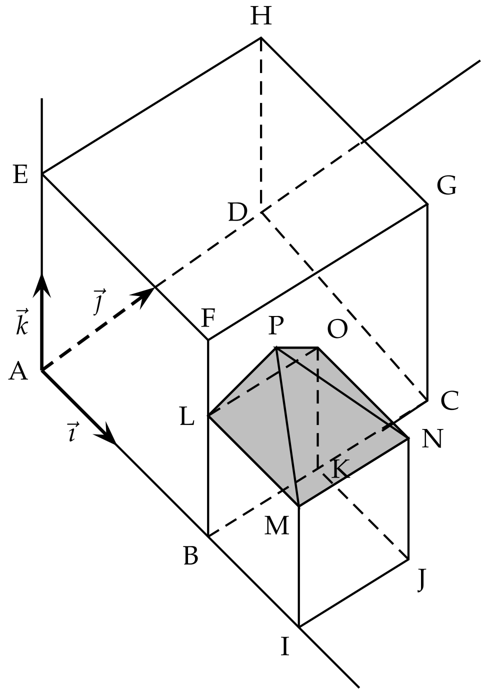
b)
```
def somme_b():
    S=0
    for k in range(100) :
        S=S+1/(k+1)
    return S
```

d)
```
def somme_d():
    k=0
    while k<100:
        S=S+1/(k+1)
    return S
```

EXERCICE 2

Géométrie dans l'espace (Centre Étrangers sujet 2 mars 2023)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, avec $\vec{\imath}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1) a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2) L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\,;\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right)$.
3) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$.
   b) Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$.
   c) Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?
4) Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

Exercice 3

Probabilité (Centre Étrangers sujet 2 mars 2023)

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé.
Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification.
  Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est $0,6$.
- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés.
  Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.

Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n° 1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80 % des cas.

Condition n° 2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.
Le jeu peut-il être retenu ?

EXERCICE 4

Probabilité (Polynésie sujet 1 mars 2023)

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;

Partie A

1) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2) Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.
3) On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
   Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels.

On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.
On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire.
On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2) Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.