Contrôle de mathématiques

Mercredi 27 septembre 2023

Exercice 1

QCM **(5 points)**

Cette exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$: $u_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

   On a alors :

   a) $u_2 = \dfrac{1}{6}$. **b)** $u_2 = \dfrac{1}{2}$. **c)** $u_3 = \dfrac{2}{3}$. **d)** $u_3 = \dfrac{3}{4}$.

2) On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 4$.
   et la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 12$.
   On peut affirmer que

   a) (v_n) est arithmétique et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
   c) (v_n) est géométrique et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -12$;
   b) (v_n) est géométrique et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
   d) (v_n) est géométrique et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12$.

3) Soit $A = 2022(1+2+3+\cdots+2023)$ et $B = 2023(1+2+3+\cdots+2022)$.
   On a alors :
   a) $A = B$ **b)** $A < B$ **c)** $A > B$ **d)** $A + 2023 = B$

4) La Somme $S = 7 + 14 + 28 + \cdots + 114\,688$ vaut :
   a) 458 745 **b)** 229 369 **c)** 210 239 **d)** 114 681

5) Quel est la valeur affichée par le script ?

   a) 7 **b)** 8 **c)** 9 **d)** 10

```
u=1 ; n=0
while u<1000 :
    u=2*u
    n=n+1
print(n)
```

Exercice 2

Location de voiture **(6 points)**

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2023, 280 voitures ont été louées avec ce système de location. Le responsable souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2023. Ainsi $u_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1) Combien de voitures ont-elles été louées au mois de février 2023 ?
2) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 420$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.
   b) Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4) La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant à l'aide d'un algorithme.

```
n=0
u=280
while  ...  :
    n=n+1
    u =...
print(n)
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme.
   b) Qu'affiche l'algorithme à la fin de l'exécution ?
   c) Quel est le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures ?

EXERCICE 3

Avec une suite géométrique **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}n + 1$

1) Calculer u_1 et u_2.
2) On pose $v_n = u_n - n$
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Quelle sont les limites de la suite (v_n) et de la suite (u_n) ?

EXERCICE 4

Avec une suite arithmétique **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-4}{4 + u_n}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) On pose $v_n = \dfrac{1}{2 + u_n}$
   a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que $u_n = \dfrac{2}{n+1} - 2$.
   d) Que peut-on conjecturer pour la limite de (u_n) ?