Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 27 septembre 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse d) :** $u_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $u_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{6+2+1}{12} = \dfrac{3}{4}$

2) **Réponse d) :** $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = \dfrac{2}{3}u_n + 4 - 12 = \dfrac{2}{3}u_n - 8 = \dfrac{2}{3}(u_n - 12) = \dfrac{2}{3}v_n$

   (v_n) géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \overset{u_n=v_n+12}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} u_n = 12.$

3) **Réponse c) :** $A = 2\,022 \times 2\,023 \times \dfrac{1+2\,023}{2} = 2\,022 \times 2\,023 \times 1\,012.$

   $B = 2\,023 \times 2\,022 \times \dfrac{1+2\,022}{2} = 2\,023 \times 2\,022 \times 1\,011,5$ donc $A > B$.

4) **Réponse b) :** S est la somme d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 7. Le dernier terme d'ordre n vaut :

   $7 \times 2^n = 114\,688 \Rightarrow 2^n = \dfrac{114\,688}{7} = 16\,384 = 2^{14} \Rightarrow n = 14.$

   Il y a donc 15 termes : $S = 7 \times \dfrac{1-2^{15}}{1-2} = 7(2^{15}-1) = 229\,369.$

5) **Réponse d) :** u prend les valeurs des puissances de 2, la boucle s'arrête pour la puissance de 2 juste supérieure à 1 000 soit 1024 qui correspond à $n = 10$

EXERCICE 2

Location de voiture **(6 points)**

1) $u_1 = 0,9 \times 280 + 42 = 294$. En février 2023, on a loué 294 voitures.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0,9u_n + 42 - 420 = 0,9u_n + 378 = 0,9\left(u_n - \dfrac{378}{0,9}\right)$

   $= 0,9(u_n - 420) = 0,9v_n.$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,9$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = -140$.

   b) $v_n = v_0\,q^n = -140 \times 0,9^n$ et $u_n = v_n + 420 = 420 - 140 \times 0,9^n$.

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$ par produit est somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 420.$

   Si la tendance se poursuit, au bout d'un certain nombre de mois, la location mensuelle de voitures se stabilisera vers 420 voitures.

4) a) cf ci-contre

   b) À la fin de l'exécution l'algorithme affiche 12.

   c) La commune devra augmenter le nombre de voiture au mois de janvier 2024.

```
n=0
u=280
while u<=380 :
    n=n+1
    u=0.9*u+42
print(n)
```

EXERCICE 3

Avec une suite géométrique **(5 points)**

1) $u_1 = \dfrac{3}{2} + 0 + 1 = \dfrac{5}{2}$, $u_2 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{11}{4}$.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}n + 1 - n - 1 = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2}n = \dfrac{1}{2}(u_n - n) = \dfrac{1}{2}v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 3$.

b) $v_n = v_0\, q^n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $u_n = v_n + n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

EXERCICE 4

Avec une suite arithmétique **(4 points)**

1) $u_1 = \dfrac{-4}{4+0} = -1$, $u_2 = \dfrac{-4}{4-1} = -\dfrac{4}{3}$, $u_3 = \dfrac{-4}{4 - \dfrac{4}{3}} = -4 \times \dfrac{3}{8} = -\dfrac{3}{2}$.

2) a) $$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2+u_{n+1}} - \dfrac{1}{2+u_n} = \dfrac{1}{2 - \dfrac{4}{4+u_n}} - \dfrac{1}{2+u_n} = \dfrac{4+u_n}{8+2u_n-4} - \dfrac{1}{2+u_n}$$

$$= \dfrac{4+u_n}{4+2u_n} - \dfrac{1}{2+u_n} = \dfrac{4+u_n-2}{2(2+u_n)} = \dfrac{2+u_n}{2(2+u_n)} = \dfrac{1}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}$, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2+u_n} = \dfrac{1}{2}$.

b) $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}n$.

c) $v_n = \dfrac{1}{2+u_n} \Leftrightarrow 2v_n - v_n u_n = 1 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1-2v_n}{v_n} = \dfrac{1-1-n}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}n} \overset{\times 2}{=} \dfrac{-2n}{n+1}$

$u_n = \dfrac{-2(n+1)+2}{n+1} = -2 + \dfrac{2}{n+1}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$, par somme, on peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

La suite (u_n) converge vers -2.