Contrôle de mathématiques

Mercredi 18 octobre 2023

Exercice 1

Récurrence **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3 \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
2) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n). Justifier.

Exercice 2

QCM **(3 points)**

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n - 3n^2}{(1-2n)^2}$.

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{2}$. **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{3}{4}$. **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{4}$. **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$.

2) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -3\left(-\dfrac{5}{8}\right)^n$.

   a) converge.
   b) diverge vers $+\infty$.
   c) diverge vers $-\infty$.
   d) diverge sans limite.

3) Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + \dfrac{3}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 - \dfrac{3}{n+1}$, alors la suite (u_n) :

   a) converge.
   b) diverge.
   c) peut converger vers -1.
   d) peut diverger.

Exercice 3

Limites de suites **(3 points)**

1) Soit la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \leqslant u_n \leqslant n+3$. Déterminer avec soin :

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$

2) Déterminer avec soin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 2}{2^n + 3}$.

EXERCICE 4

Population d'insecte **(8 points)**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.
En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (u_n), définie par :

$$u_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N} : \; u_{n+1} = 1,6u_n - 1,6u_n^2,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1) Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.

   a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.

3) a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite et on admet que la fonction f est continue en ℓ.

   c) Déterminer la valeur de ℓ.
   Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ?
   Justifier la réponse.

4) On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

   a) Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?

   b) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(a):
    u=0.1
    n=0
    while u<a :
        u=1.6*u-1.6*u**2
        n=n+1
    return n
```

EXERCICE 5

Vrai-Faux **(3 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1) **Affirmation** : La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

2) **Affirmation** : Toute suite bornée est convergente.

3) **Affirmation** : Toute suite croissante tend vers $+\infty$.