Correction contrôle de mathématiques
Du mercredi 18 octobre 2023

EXERCICE 1

Récurrence **(3 points)**

1) **Initialisation :** $n = 0,\ 2 \times 0,9^0 - 3 = -1 = u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$, montrons $u_{n+1} = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$:

$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3 \overset{\text{HR}}{=} 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$, par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$.

La suite (u_n) converge vers -3.

EXERCICE 2

QCM **(3 points)**

1) **Réponse b) :** $u_n = \dfrac{2n - 3n^2}{1 - 4n + 4n^2} \overset{\div n^2}{=} \dfrac{\dfrac{2}{n} - 3}{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{4}{n} + 4} \xrightarrow{n\to+\infty} -\dfrac{3}{4}$

2) **Réponse a) :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{5}{8}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{5}{8} < 1$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3) **Réponse d) :** $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{3}{n+1} = 2$.

On ne peut rien dire sur la convergence de (u_n).

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$, la suite (u_n) ne peut converger vers -1.

EXERCICE 3

Limites de suites **(3 points)**

1) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, d'après le th. de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant u_n \leqslant n + 3 \overset{\div n}{\Rightarrow} 1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{3}{n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{n} = 1$.

D'après le th. des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

2) $\dfrac{3^n - 2}{2^n + 3} \overset{\div 3^n}{=} \dfrac{1 - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{3} < 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 2}{2^n + 3} = +\infty \end{array}$$

Exercice 4

Population d'insecte **(8 points)**

1) $u_1 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2 = 0,144$. Au bout d'un mois il y a 144 000 insectes.

2) a) $1,6x - 1,6x^2 = x \Leftrightarrow 1,6x^2 - 0,6x = 0 \Leftrightarrow x(1,6x - 0,6)$

   Deux solution $x = 0$ ou $x = \dfrac{0,6}{1,6} = 0,375$.

   b) $f'(x) = 1,6 - 3,2x = 1,6(1 - 2x)$. d'où $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   $\forall x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $f'(x) > 0$. La fonction f est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.

3) a) **Initialisation :** $n = 0$, $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,144$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   La proposition est initialisée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$, montrons $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   HR : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ comme la fonction f est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, on a :

   $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0,4 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   La proposition est héréditaire.

   Conclusion : par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   b) La suite (u_n) est croissante car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et majorée par 0,5 car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0,5$ donc d'après le théorème des suite monotone, la suite (u_n) converge vers ℓ telle que $0 \leqslant \ell \leqslant 0,5$.

   c) La suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers ℓ et comme f est continue en ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$.

   Comme (u_n) est croissante et $u_0 = 0,1$, on a $\ell \geqslant 0,1$, d'après la question 2a) $\ell = 0,375$.

   Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera préservé car la population d'insectes augmentera jusqu'à se stabiliser vers 375 000. Le nombre d'insectes ne dépassera donc pas 400 000.

4) a) Si l'on saisit seuil(0.4) la condition $u < 0,4$ sera toujours vérifiée, donc le programme ne sortira pas de la boucle (boucle infinie) et donc le programme ne peut sortir de résultat.

   b) Pour seuil(0.35), on trouve $n = 6$.

   Au bout de 6 mois la population d'insectes sera supérieure ou égale à 350 000.

Exercice 5

Vrai-Faux **(3 points)**

1) **Vrai** : car $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \overset{n+1 \geqslant 1}{\Rightarrow} -1 \leqslant \dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$

2) **Faux** : la suite $((-1)^n)$ est bornée dans $[-1\,;\,1]$ mais n'admet pas de limite.

3) **Faux** : La suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ converge vers 1 et (u_n) est croissante

   car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{1}{n+2} - 1 + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.