Contrôle de mathématiques

Mercredi 29 novembre 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des cinq questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x + 2}{x + 1}$ alors :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 a pour équation

a) $y = -x + 2$ **b)** $y = 3x + 2$ **c)** $y = 3x - 2$ **d)** $y = x + 2$

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2x^2 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = -2x^2 + 8x - 4 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

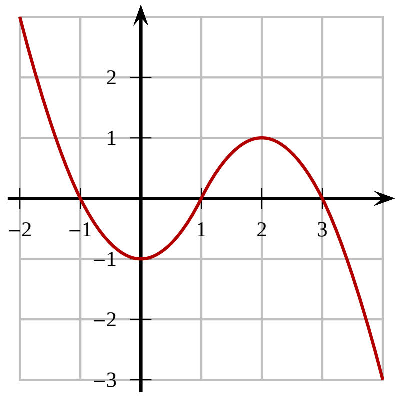
a) f est continue et non dérivable en 1 **c)** f n'est pas continue en 1
b) f est dérivable en 1 **d)** f est dérivable et non continue en 1

4) Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\,; +\infty[$ par : $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$.
Alors sa fonction dérivée f' est telle que :

a) $f'(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$ **c)** $f'(x) = -\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

b) $f'(x) = (1 + x)e^{\frac{1}{x}}$ **d)** $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{-\frac{1}{x^2}}$

5) On donne ci-dessus la **courbe représentative de la dérivée** f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a) f est croissante sur $[0\,; 2]$
b) f est croissante sur $[-2\,; -1]$
c) f admet un minimum en 3.
d) f admet un minimum en 0.

EXERCICE 2

Équation du troisième degré **(6 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 - x + 4$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$, puis résoudre $f'(x) = 0$
3) Dresser le tableau de variation de f. On donnera la valeur exacte des extremum.
4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner une valeur au dixième de α.
5) Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$
   a) Donner l'ensemble de définition de g.
   b) Dresser le tableau de variation de g en vous justifiant.

EXERCICE 3

Limites **(4 points)**

Déterminer les limites suivantes **en se justifiant** avec soin :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^2}{x^2 + 1}$ 2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} \frac{3x}{4 - x^2}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to+1} \frac{-\mathrm{e}^x}{(1 - x)^2}$

EXERCICE 4

Fonction exponentielle **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$. On donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

1) La courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle une asymptote ? Si oui donner son équation.
2) Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$
3) Déterminer $f'(x)$ que l'on factorisera.
4) Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
5) Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$.