Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 29 novembre 2023

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c) :** $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1} -x^2+5x+2=-4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x+1=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=-\infty$

   a) faux car $+\infty$, b) faux la limite en -1 n'existe pas, d) faux car $-\infty$

2) **Réponse a) :** $f(x)=2$ et $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(-x-1)$, $f'(0)=-1$ d'où $T_0 : y=-x+2$.

3) **Réponse b) :** $f(1)=2$ et $t(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ taux d'accroissement de f en 1.

   - $x<1$: $t(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=2(x+1)\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}4$
   - $x>1$: $t(x)=\dfrac{-2x^2+8x-4-2}{x-1}=\dfrac{-2(x^2-4x+3)}{x-1}\overset{x_1=1}{=}\dfrac{-2(x-1)(x-3)}{x-1}$ $=-2(x-3)\underset{x\to 1^+}{\longrightarrow}4$

   Donc $\lim\limits_{x\to 1} t(x)=4$, f dérivable en 1 et $f'(1)=4$ (f est donc continue en 1).

4) **Réponse a) :** $f'(x)=1\times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+x\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

5) **Réponse b) :** Pour que la fonction f soit croissante, la fonction dérivée f' doit être positive et donc que sa représentation graphique soit au dessus de l'axe des abscisses ce qui est vérifié sur $[-2\,;-1]$.

   a) faux f' non monotone sur $[0\,;2]$, c) faux f admet un maximum en 3 ($f'>0$ puis $f'<0$) et d) est faux car $f'(0)\neq 0$.

EXERCICE 2

Équation du troisième degré **(6 points)**

1) $f(x)\overset{x\neq 0}{=}x^3\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)$ donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} x^3=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} 1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}=1\end{array}\right\}$ par produit $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

2) $f'(x)=3x^2-2x-1$. $f'(x)=0 \overset{x=1 \text{ rac. evid.}}{\Leftrightarrow} x=1$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$.

3) On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{113}{27}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

4) Sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{3}\right]$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement croissante et change de signe car $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{113}{27}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.

Sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, la fonction f a pour minimum 3 donc ne peut s'annuler.

Conclusion : L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Par balayage on obtient : $f(-1,5)\approx -0,125$ et $f(-1,4)\approx +0,696$ donc $\alpha \approx -1,5$.

5) a) $f(x)\geqslant 0$, d'après le tableau de variations $x\geqslant\alpha$, donc $D_g=[\alpha\,;+\infty[$.

b) Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème des fonctions composées, g a même variation que f :

x	α		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{113}{27}}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Exercice 3

Limites **(4 points)**

1) $\dfrac{x-x^2}{x^2+1} \overset{\div x^2}{=} \dfrac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{1}{x^2}}$ donc $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1=-1\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x^2}=1\end{array}\right\}$ par quotient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x^2}{x^2+1}=-1$

2)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-2}3x=-6\\[2ex] \displaystyle\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}4-x^2=0^+\end{array}\right\}$ par quotient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{4-x^2}=-\infty$

3) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to1}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}\end{array}\right\}$ par composition $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}=\mathrm{e}$

4) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to1}-\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to1}(1-x)^2=0^+\end{array}\right\}$ par quotient $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{-\mathrm{e}^x}{(1-x)^2}=-\infty$

Exercice 4

Fonction exponentielle **(5 points)**

1) La courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$ et $-\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(-x)^2}=-x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}=-f(x)$.

La fonction f est impaire donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

3) $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}+x(-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}=(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}=(1-x)(1+x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

4) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=-1$ et signe $f'(x)=$ signe $(1-x^2)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

5) $f(0)=0$ et $f'(0)=1$ donc $T_0\ :\ y=x$.