Correction du devoir

Du lundi 8 janvier 2024

EXERCICE 1

Questions diverses sur les fonctions **(10 points)**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, par somme et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$.
On a le système suivant :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b+1} = 2 \\ \dfrac{a}{b} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+2 \\ a = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 6 \end{cases} \text{ d'où } f(x) = \frac{6}{2+\mathrm{e}^{-x}}$$

2) a)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\dfrac{x-1}{2x+4}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$D_f =]-\infty\,;\,-2[\cup]1\,;\,+\infty[$

b) $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x} - 8 > 0$, on pose $X = \mathrm{e}^{x}$ avec $X > 0$, l'inéquation devient :
$X^2 + 2X - 8 > 0$ racine évidente $X_1 = 2 \overset{P=-8}{\Rightarrow} X_2 = -4 < 0$ (non retenu).

X	0		2		$+\infty$
X^2+2X-8	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-8$		$-$	0	$+$	

$D_g =]\ln 2\,;\,+\infty[$

3) On dérive deux fois la fonction f :
$f'(x) = 10\,\mathrm{e}^{-0,5x} - 5(x-1)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (-5x+15)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = 5(-x+3)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$
$f''(x) = -5\,\mathrm{e}^{-0,5x} - 2,5(-x+3)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (2,5x-12,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = 2,5(x-5)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$

f'' est du signe de $(x-5)$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	0	convexe	

4) Le programme qui donne une valeur approchée de α est le **programme c)**
Ce programme utilise l'algorithme de dichotomie. On détermine le milieu m de l'intervalle $[a, b]$ et comme la fonction est croissante si $f(m) < 0$, on remplace a par m car $f(m) < 0$ et $f(b) > 0$ sinon on remplace b par m.
On réitère le processus jusqu'à la précision de 0,001.

- Le programme a) remplace b par m lorsque $f(m) < 0$. Il n'effectuera qu'une boucle.
- Le programme b) calcule le milieu m de l'intervalle avant la boucle. Il n'effectuera qu'une boucle.

5) a) La courbe qui représente la fonction f est **la courbe $\mathscr{C}_3$** qui est monotone change une fois de concavité. La courbe $\mathscr{C}_1$ représente alors la dérivée f' (ne change pas de signe) et la courbe $\mathscr{C}_2$ représente la dérivée seconde f'' (change une fois de signe) .

- Si la courbe $\mathscr{C}_1$ représentait la fonction f (change trois fois de concavité) une deux autres courbe devrait couper deux fois l'axe des abscisses.
- Si la courbe $\mathscr{C}_2$ représentait la fonction f (change trois fois de variation) une deux autres courbe devrait couper deux l'axe des abscisses.

b) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_3$ en 4 est 3 car sur $\mathscr{C}_1$ on a $f'(4) = 3$.

c) $\mathscr{C}_2$ possède trois points d'inflexion en 3, 4 et 5. (plus précisément 3,23 ; 4 et 4,76)

EXERCICE 2

Fonction ln **(10 points)**

Partie A : Fonction auxiliaire g

1) Limite en 0^+ : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+x^2 = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0\end{array}\right\}$ Par somme et produit $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$

Limite en $+\infty$: $g(x) = x^2\left(\dfrac{1}{x^2} + 1 - 2\ln x\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x = -\infty \overset{\text{somme}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} + 1 - \ln x = -\infty\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) $g'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x - 4x\ln x - 2x = -4x\ln x.$

3) $x > 0$ donc $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et signe $g'(x)$ = signe $(-\ln x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

4) a)
- Sur $]0\,;\,1[$, la fonction g est croissante de minimum 1 donc ne peut s'annuler.
- Sur $[1\,;\,+\infty[$, la fonction g est continue (car dérivable), strictement décroissante et change de signe car $g(1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, d'après le TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

$g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I, et $g(\mathrm{e}) = 2 - \mathrm{e} < 0$ donc $\alpha \in [1\,;\,\mathrm{e}]$.

b) L'algorithme de dichotomie donne $1,894 \leqslant \alpha \leqslant 1,895$ au bout de 11 itérations.

5)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Partie B : Étude de la fonction principale

1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2} = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

2) $x > 0$ donc signe $f'(x)$ = signe de $g(x)$ donc d'après la partie A, on a :

La fonction f admet donc un maximum en α.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$f(\alpha)$	↘	

3) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$. $f(\alpha) = \dfrac{\ln\alpha}{1+\alpha^2} = \dfrac{\frac{\cancel{1+\alpha^2}}{2\alpha^2}}{\cancel{1+\alpha^2}} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

4) $\mathrm{T}_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}(x-1)$ et $\mathrm{T}_\alpha : y = f(\alpha) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

Soit J le point d'intersection de T_1 et T_α : $\dfrac{1}{2}(x_\mathrm{J} - 1) = \dfrac{1}{2\alpha^2} \Leftrightarrow x_\mathrm{J} = \dfrac{1}{\alpha^2} + 1.$

Donc $\mathrm{J}\left(\dfrac{1}{\alpha^2} + 1\,;\,\dfrac{1}{2\alpha^2}\right)$