BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Exercice 1 (5 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.
On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\dfrac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\dfrac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\dfrac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1) La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

   a) $\dfrac{7}{10}$ b) $\dfrac{3}{25}$ c) $\dfrac{7}{25}$ d) $\dfrac{24}{125}$

2) La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

   a) $\dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{7}{15}$ d) $\dfrac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives.
On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise.
On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\dfrac{12}{25}$.

3) La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

   a) 0,859 b) 0,671 c) 0,188 d) 0,187

4) On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de 0,207. Alors :

   a) $n = 2$ b) $n = 3$ c) $n = 4$ d) $n = 5$

5) La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

   a) $1 - \left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ b) $\left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$ c) $\left(\dfrac{12}{25}\right)^{10}$ d) $1 - \left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$

Exercice 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormée $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère :

- d_1 la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1) a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.
   b) Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   c) Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
   d) Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?
2) a) Vérifier que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
   b) On considère le plan (P) passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
   On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.
   Démontrer que l'intersection du plan (P) et de la droite d_2 est le point M(3 ; 3 ; 5).
3) Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M.
   Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :
$$\begin{cases} x = -r+3 \\ y = 2r+3 \\ z = 3r+5 \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}.$$
   a) Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   b) Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

Exercice 3 (5 points)

Partie A

On définit sur l'intervalle I $=]0,; +\infty[$ la fonction g par : $g(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur I.

1) Montrer que pour $x \in$ I, le signe de $g'(x)$ est celui de $\left(x^2 - 2x + 2\right)$.
2) En déduire que la fonction g est strictement croissante sur I.
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0,5 ; 1].
4) Donner le tableau de signes de g sur I.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I par : $f(x) = e^x \ln x$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur I et on admet que : $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

   Démontrer que : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f''(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ln x\right)$.

On remarquera que $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f''(x) = \mathrm{e}^x \times g(x)$.

2) a) Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur I. Justifier.
   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A.
   c) Étudier la convexité de la fonction f sur I. Justifier.
3) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Montrer que $f'(\alpha) = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$.
   On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
   c) Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à I.
   d) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur I.

Exercice 4 **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Soit n un entier naturel.
   Recopier et compléter la fonction u d'argument n ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```python
def u(n):
    u=...
    for i in range(1,n+1):
        u=...
    return u
```

3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 2n$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).
   c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0, \; u_n \geqslant 10^p$?
4) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
5) On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
   a) En dessous de la fonction u précédente, on a écrit la fonction v ci-dessous :

```python
def v(n):
    L=[]
    for i in range(n+1):
        L.append(u(i)-2*i+1)
    return L
```

   « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.
   Lorsqu'on saisit v(5) dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

   Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
   Démontrer cette conjecture.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.