BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) **Réponse c)** : $p(\text{A} \cap \text{G}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{G}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{10} = \dfrac{7}{25}$

2) **Réponse b)** : $p(\text{G}) = p(\text{A} \cap \text{G}) + p(\text{B} \cap \text{G}) = p(\text{A} \cap \text{G}) + (1 - p(\text{A})) \times p_{\text{B}}(\text{G}) \Rightarrow$

$$p_{\text{B}}(\text{G}) = \frac{p(\text{G}) - p(\text{A} \cap \text{G})}{1 - p(\text{A})} = \frac{\dfrac{12}{25} - \dfrac{7}{25}}{1 - \dfrac{2}{5}} = \frac{1}{3}$$

3) **Réponse c)** : Soit X la v.a. associée au nombre de parties gagnées.

X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}\left(10\,;\ \dfrac{12}{25} = 0,48\right)$.

$$p(X = 6) = \binom{10}{6}\left(\frac{12}{25}\right)^6\left(\frac{13}{25}\right)^4 = \text{binomFdp}(10, 0.48, 6) \approx 0,1878 \approx 0,188 \text{ au milième près.}$$

4) **Réponse b)** : On doit résoudre $p(X \leqslant n) = 0,207$.

En testant les valeurs données, on trouve $n = 3$, $\text{binomFRép}(10, 0.48, 3) \approx 0,2067$

5) **Réponse d)** : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{13}{25}\right)^{10}$.

EXERCICE 2 (5 points)

1) a) D'après la représentation paramétrique, $\vec{v}(2\,;\ 1\,;\ 0)$ est un vecteur directeur de la droite d_2.

b) Les coordonnées de $\vec{u}(1\,;\ -1\,;\ 1)$ et $\vec{v}(2\,;\ 1\,;\ 0)$ ne sont pas proportionnelles car $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{1}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

c) Une représentation paramétrique de la droite d_1 est : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes si le système suivant admet une solution

$$\begin{cases} 2 + t = 2k - 3 & (1) \\ 3 - t = k & (2) \\ t = 5 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3)\ \ t = 5 \\ (2)\ \ k = 3 - 5 = -2 \\ (1)\ \ 2 + 5 \neq 2(-2) - 3 \text{ non vérifiée} \end{cases}$$

Le système n'est pas vérifié donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d) Les droites d_1 et d_2 ne sont ni parallèles, ni sécantes, elles sont alors non coplanaires.

2) a) $\vec{w} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - 2 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{v}$

b) On remplace les équations de la droite d_2 dans l'équation du plan. On obtient alors :

$5(2k - 3) + 4k - 5 - 22 = 0 \Leftrightarrow 10k - 15 + 4k - 27 = 0 \Leftrightarrow 14k = 42 \Leftrightarrow k = 3$

Le point M est alors déterminé en remplaçant $k = 3$ dans les équations de d_2, on obtient alors M$(3\,;\ 3\,;\ 5)$.

3) a) La droite Δ est orthogonale à d_1 car $\vec{w} \perp \vec{u}$.

On détermine le point éventuel d'intersection L en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} -r + 3 = 2 + t & (1) \\ 2r + 3 = 3 - t & (2) \\ 3r + 5 = t & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\times(1)+(2)\quad 9 = 7 + t \Leftrightarrow t = 2 \\ (1)\ \ r = 1 - t = -1 \\ (3)\ \ 3(-1) + 5 = 2 = t \text{ vérifié} \end{cases}$$

Les droites Δ et d_1 sont perpendiculaire en un point L dont on détermine les coordonnées en remplaçant $r = -1$ dans les équations de Δ, on trouve L(4 ; 1 ; 2)

b) On vient de montrer que Δ est perpendiculaire à d_1 et de plus la droite Δ est perpendiculaire à d_2 en M car $\vec{w} \perp \vec{v}$ et $\mathrm{M} \in \Delta \cap d_2$. La droite Δ est bien la droite cherchée.

Exercice 3 (5 points)

Partie A

1) $g'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2x+2+x^2}{x^3} = \dfrac{x^2-2x+2}{x^3}$

Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $(x^2 - 2x + 2)$.

2) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \overset{\Delta=4-8=-4<0}{\Leftrightarrow}$ pas de solution.

g' a un signe constant, celui du coefficient devant x^2 donc $\forall x \in \mathrm{I},\ g'(x) > 0$.

La fonction g est strictement croissante sur I.

3) $g(0,5) = 4 - 4 + \ln(0,5) = -\ln 2 < 0$ et $g(1) = 2 - 1 + 0 = 1 > 0$

Sur $[0,5 ; 1]$, la fonction g est continue car dérivable, strictement monotone (croissante) et change de signe car $g(0,5) \times g(1) < 0$, d'après le TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

4) On a alors le tableau de signe suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I par : $f(x) = \mathrm{e}^x \ln x$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) $f''(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right) + \mathrm{e}^x\left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ln x\right) = \mathrm{e}^x g(x)$.

2) a) Signe $f''(x) =$ signe $g(x)$ car $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{e}^x > 0$.

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

b) Sur I la fonction f'' ne s'annule qu'une fois en changeant de signe donc $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A d'abscisse α.

c)
- Sur $]0 ; \alpha[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]\alpha ; +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.

3) a) $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ Par produit $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ Par produit $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha^2} + \ln\alpha \Leftrightarrow \ln\alpha = -\dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}$ (1)

$f'(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \ln\alpha\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$

c) $0,5 < \alpha < 1 \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} -1 < -\alpha < 0 \overset{+1}{\Leftrightarrow} 0 < 1 - \alpha < 1 \overset{\times\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}>0}{\Leftrightarrow} 0 < \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha) < \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}$

donc $f'(\alpha) > 0$, d'après le tableau de signe de f'', on a :

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	$f'(\alpha) > 0$	$\nearrow$	

Donc $\forall x \in \mathrm{I},\ f'(x) > 0$.

d) On obtient alors le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$		$+$		
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty$	0		$+\infty$

Exercice 4 (5 points)

1) $u_1 = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 6$ et $u_2 = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 28$.

2) On obtient le programme suivant .

```python
def u(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=5*u-8*(i-1)+6
    return u
```

3) a) **Initialisation :** $n = 0$, $u_0 = 0 \geqslant 2 \times 0$, la proposition est initialisée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 2n$, montrons que $u_{n+1} \geqslant 2(n+1)$
(HR) $u_n \geqslant 2n \overset{\times 5}{\Rightarrow} 5u_n \geqslant 10n \overset{-8n+6}{\Rightarrow} 5u_n - 8n + 6 \geqslant 10n - 8n + 6 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant 2n + 6 \geqslant 2(n+1)$
La proposition est héréditaire.
Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, tout intervalle $]10^p\,;+\infty[$ contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0 donc $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$.
D'après 3a), $u_n \geqslant 2n \overset{\times 4}{\Rightarrow} 4u_n \geqslant 8n \overset{-8n+6}{\Rightarrow} 4u_n - 8n + 6 \geqslant 8n - 8n + 6 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 6 > 0$.
La suite (u_n) est croissante.

5) a) D'après la liste de v(5), on obtient le terme suivant en multipliant par 5 donc $v_{n+1} = 5v_n$.
Démontrons cette conjecture :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 = 5u_n - 10n + 5 = 5(u_n - 2n + 1) = 5v_n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 5$, donc la suite v_n est géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 1$.
On a alors $v_n = v_0\, q^n = 5^n$ or $v_n = u_n - 2n + 1 \Rightarrow u_n = v_n + 2n - 1 = 5^n + 2n - 1$.