# Algorithme compte gouttes pour les décimales de Pi

## 1 Le principe

Soit le nombre $\pi$ sous sa forme décimale : $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\ldots$

Cette écriture peut s'écrire à l'aide de la forme de Horner

$$\pi = 3 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\left(4 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\left(5 + \frac{1}{10}\left(9 + \frac{1}{10}\left(2 + \frac{1}{10}(\ldots)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

On observe que le facteur $\dfrac{1}{10}$ correspond à la base 10 qui notre base de notre système d'écriture.

Considérons la série de Euler qui donne la valeur de $\pi$ :

$$\pi = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\times 2\times\cdots\times n}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)} = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\times 2}{3\times 5} + \frac{1\times 2\times 3}{3\times 5\times 7} + \frac{1\times 2\times 3\times 4}{3\times 5\times 7\times 9} + \ldots\right)$$

Écrivons cette formule avec la forme de Horner :

$$\pi = \left(2 + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{5}\left(2 + \frac{3}{7}\left(2 + \frac{4}{9}\left(2 + \frac{5}{11}\left(2 + \frac{6}{13}(\ldots)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

On observe cette fois que les facteurs $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \ldots, \dfrac{n}{2n+1}, \ldots\right)$ peuvent être considérés comme une base à pas variable. Dans cette base un peu particulière, l'expression de $\pi$ est $[2,2,2,2,\ldots]$. On remarque alors que dans cette base, $\pi$ devient alors un nombre d'une simplicité stupéfiante.

Il ne reste donc qu'à trouver un algorithme qui permette de transcrire $[2,2,2,2,\ldots]$ dans notre système à base 10. Pour cela, on applique l'algorithme de Horner (cf première) avec les fractions $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \ldots, \dfrac{n}{2n+1}, \ldots\right)$

## 2 L'algorithme

### 2.1 Nombre de digits

Tout d'abord, un petit calcul en ce qui concerne l'encombrement mémoire. Dans la forme de Horner, on voit que le pas $\frac{n}{2n+1}$ de la base est à chaque fois légèrement inférieur à $\frac{1}{2}$. La valeur exacte $\frac{1}{2}$ reviendrait à considérer la base 2. Pour avoir un chiffre significatif dans notre système décimal pour un nombre écrit en base 2 avec $x$ "*digit*", on a $2^x = 10 \iff x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32$. On suppose que cette règle peut s'appliquer à notre base à pas variable.

Conclusion : si on veut $n$ chiffres significatifs de $\pi$, on aura besoin de $3,32\,n$ "*digits*" dans notre base à pas variable.

Si l'on veut 4 chiffres significatifs pour $\pi$, on aura besoin de :
$4 \times 3,32 = 13,28$ soit 14 "*digits*".

### 2.1.1 Tableau donnant 4 chiffres significatifs

| A | $\pi$ | $r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | **8** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | = | | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | **17** | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |
| init. | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | **2** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Premier chiffre | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\times$ 10 | | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | **20** | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| retenue | | 10 | 12 | 12 | 12 | 10 | 12 | 7 | 8 | **9** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| somme | 3 | 30 | 32 | 32 | 32 | 30 | 32 | 27 | 28 | **29** | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| reste | | 0 | 2 | 2 | 4 | 3 | 10 | 1 | 13 | **12** | 1 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| Deuxième chiffre | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\times$ 10 | | 0 | 20 | 20 | 40 | 30 | 100 | 10 | 130 | **120** | 10 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| retenue | | 13 | 20 | 33 | 40 | 65 | 48 | 98 | 88 | **72** | 160 | 154 | 132 | 91 | 0 |
| somme | 1 | 13 | 40 | 53 | 80 | 95 | 148 | 108 | 218 | **192** | 170 | 354 | 332 | 291 | 200 |
| reste | | 3 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 4 | 8 | **5** | 18 | 18 | 10 | 16 | 11 |
| Troisième chiffre | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\times$ 10 | | 30 | 10 | 30 | 30 | 50 | 50 | 40 | 80 | **50** | 180 | 180 | 100 | 160 | 110 |
| retenue | | 11 | 24 | 30 | 40 | 40 | 48 | 70 | 80 | **135** | 120 | 77 | 72 | 52 | 0 |
| somme | 4 | 41 | 34 | 60 | 70 | 90 | 98 | 110 | 160 | **185** | 300 | 257 | 172 | 212 | 110 |
| reste | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 10 | 6 | 10 | **15** | 15 | 5 | 11 | 12 | 2 |
| Quatrième chiffre | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\times$ 10 | | 10 | 10 | 0 | 0 | 0 | 100 | 60 | 100 | **150** | 150 | 50 | 110 | 120 | 20 |
| retenue | | 4 | 4 | 12 | 32 | 75 | 72 | 98 | 112 | **90** | 50 | 66 | 48 | 0 | 0 |
| somme | 1 | 14 | 14 | 12 | 32 | 75 | 172 | 158 | 212 | **240** | 200 | 116 | 158 | 120 | 20 |
| reste | | 4 | 2 | 2 | 4 | 3 | 7 | 2 | 2 | **2** | 10 | 11 | 20 | 20 | 20 |

On obtient alors : $\pi \approx 3,141$

Les deux premières lignes (A et B) sont les numérateurs et dénominateurs des pas de la base à pas variable.
La troisième ligne (initialisation), correspond à l'expression de $\pi$ dans cette base.
On remplit la dernière colonne des lignes "*retenue*" par des 0.

L'algorithme de conversion s'effectue de droite à gauche par groupe de 4 lignes : ($\times$10), retenue, somme et reste.

Le principe consiste à multiplier le digit par 10, à additionner la retenue, à diviser la somme par le chiffre de la colonne B qui donne d'une part le quotient qui est multiplié par le chiffre de la colonne A (la retenue de la colonne suivante) et d'autre part le reste.

Remplissage de la colonne en rouge (colonne 8) :

- On remplit la ligne $\times 10$ en multipliant la ligne précédente par 10 : $2 \times 10 = 20$.
- On additionne ce nombre à la retenue que l'on a calculé avec la colonne précédente : $20 + 9 = 29$
- On effectue la division euclidienne de la somme par le nombre de la ligne B de la même colonne : $29 = 17 \times 1 + 12$
- On place le reste 12 dans la ligne reste.
- On multiplie le quotient 1 par la ligne A de la même colonne et l'on place le résultat dans la ligne retenue de la colonne suivante : $1 \times 8 = 8$

On réitère le procédé sur toutes les colonnes des 4 lignes du premier chiffre et l'on obtient 30 comme dernière somme. On divise par 10, on prend 3 comme premier chiffre de $\pi$ et 0 comme reste.
On réitère de nouveau ce procédé aux 4 lignes suivantes : on obtient le deuxième chiffre : 1 et ainsi de suite pour obtenir les chiffres suivants : 4 et 1

**Remarque :** On peut considérer qu'un chiffre fourni dans la dernière colonne est exact s'il n'est pas suivi d'un 9.
Lorsque le reste dans la colonne $r$ est supérieur à 100 (c'est rare...), on obtient alors 10 derrière la dernière décimale. On doit alors augmenter cette dernière décimale de 1.

### 2.1.2 Programme

Voici un programme que vous pouvez entrer dans votre calculette. Il ne tient pas compte du cas où l'on obtient 100 dans la colonne $r$ (cela n'arrive pas sur les premières décimales)

Pour déterminer le nombre de tableaux de 4 lignes que l'on doit effectuer, on fera l'approximation que 4 "*digits*" donne un chiffre significatif. C'est pour cette raison fera Ent($N/4$) boucles correspondant aux tableaux. Pour connaître 10 chiffres significatifs, on rentrera $N = 40$.

| | |
|---|---|
| $N$ : | Nombre de *digits* |
| $I$ : | Compteur |
| $J$ : | Rang de la décimale calculée |
| $K$ : | Compteurs de colonnes |
| $B$ : | Valeur du pas |
| $R$ : | Retenue |
| $E$ : | Dernier reste du tableau précédent (initialisée à 0) |
| $F$ : | Valeur de la décimale calculée |

- Lignes 7, 8, 9 : on rentre $N$ fois le chiffre 2 dans la liste $L_1$.
- Ligne 13 : on se positionne sur la colonne la plus à droite.

- Ligne 15 : on calcule la somme de 10 fois le reste $L_1(K)$ du tableau précédent et de la retenue.
- Ligne 16 : on calcule le reste.
- Ligne 17 : on calcule le quotient.
- Ligne 19 on prend la colonne suivante vers la gauche.
- Lignes 20, 21, 22 : si l'on ne se situe pas sur la colonne $r$ du tableau, on multiplie le quotient $R$ par le rang de la colonne. Cela donne alors la retenue de la colonne suivante à gauche.

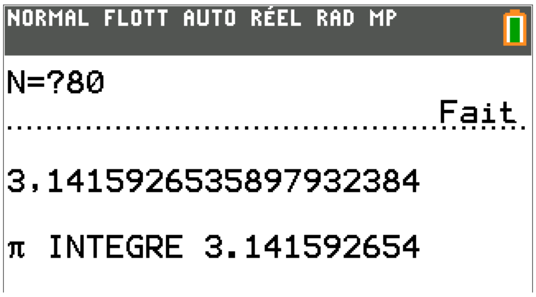
```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:COMPTEG
:EffÉcran
:EffListe L₁
:Prompt N
:0→E
:1→J
:For(I,1,N)
:2→L₁(I)
:End
:For(I,1,partEnt(N/4))
:2N-1→B
:0→R
:N→K
:While K>0
:R+10L₁(K)→R
:R-BpartEnt(R/B)→L₁(K)
:partEnt(R/B)→R
:B-2→B
:K-1→K
:If K≠0
:Then
:RK→R
:End
:End
:E+partEnt(R/10)→F
:Output(4,J,F)
:If J=1
:Then
:Output(4,2,",")
:J+1→J
:End
:R-10partEnt(R/10)→E
:J+1→J
:End
:Output(6,1,"π INTEGRE")
:Output(6,10,3.141592654)
```

**Variables** : $N, I, J, K, B, R, E, F$ entiers
$L_1$ liste

1 **Entrées et initialisation**
2 Effacer écran
3 Effacer liste $L_1$
4 Lire $N$
5 $0 \rightarrow E$
6 $1 \rightarrow J$
7 **pour** $I$ de 1 à $N$ **faire**
8 $2 \rightarrow L_1(I)$
9 **fin**
10 **Traitement**
10 **pour** $I$ de 1 à Ent$(N/4)$ **faire**
11 $2N - 1 \rightarrow B$
12 $0 \rightarrow R$
13 $N \rightarrow K$
14 **tant que** $K > 0$ **faire**
15 $R + 10L_1(K) \rightarrow R$
16 $R - B\text{Ent}\left(\dfrac{R}{B}\right) \rightarrow L_1(K)$
17 $\text{Ent}\left(\dfrac{R}{B}\right) \rightarrow R$
18 $B - 2 \rightarrow B$
19 $K - 1 \rightarrow K$
20 **si** $K \neq 0$ **alors**
21 $RK \rightarrow R$
22 **fin**
23 **fin**
24 $E + \text{Ent}\left(\dfrac{R}{10}\right) \rightarrow F$
25 Placer F à la 4e ligne de la $J$e colonne
26 **si** $J = 1$ **alors**
27 Placer "," à la 4e ligne de la 2e colonne
28 $J + 1 \rightarrow J$
29 **fin**
30 $R - 10\text{Ent}\left(\dfrac{R}{10}\right) \rightarrow E$
31 $J + 1 \rightarrow J$
32 Afficher sur la 6e ligne "$\pi$ intégré 3,141592654"
33 **fin**
34

- Ligne 24 : on calcule un chiffre significatif avec le reste précédent de la colonne reste et la retenue divisée par 10.
- Ligne 25 : Pour assembler le chiffre significatif (sortie "Output" sur la Ti), on positionne les chiffres sur la 4[e] ligne par exemple, à la colonne $J$.
- Lignes 26, 27, 28 après le premier chiffre (3), on met une virgule.
- Ligne 30 : on calcule le reste de la colonne $r$.

  Avec une Ti 82 ou 83, on obtient pour $N = 80$ à comparer à la valeur intégrée dans la calculatrice (19 décimales)




On trouve : $\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,4$