Les nombres premiers

Généralités sur les nombres premiers

EXERCICE 1

Sans calculatrice, à l'aide de divisions successives et du critère d'arrêt, déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.

$$97\ ;\ 109\ ;\ 117\ ;\ 271\ ;\ 323\ ;\ 401\ ;\ 527\ ;\ 719$$

EXERCICE 2

p est premier et $p \geqslant 5$.

1) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 3
2) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8
3) En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 24

EXERCICE 3

$p > 3$ est un nombre premier

1) Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2) Prouver que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

EXERCICE 4

Démontrer que pour tout n entier ($n \geqslant 1$), $30n+7$ n'est jamais la somme de deux nombres premiers.

EXERCICE 5

Les nombres de Mersenne

Pour $n \geqslant 1$, le $n^{\text{ième}}$ nombre de Mersenne est le nombre $M_n = 2^n - 1$.

1) Quels sont les nombres premiers parmi les nombres de Mersenne M_n pour $n \leqslant 6$.
2) Montrer la factorisation standard ($n \geqslant 1$) :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

3) Montrer que si n n'est pas premier alors le nombre de Mersenne M_n ne l'est pas non plus.
   En déduire que si M_n est premier alors n est premier.
4) La réciproque est-elle vraie ?
5) Soit a et n deux entiers tels que $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$.
   Montrer que, si $a^n - 1$ est premier, alors nécessairement $a = 2$ et n est premier.

Décomposition. Nombre de diviseurs

Exercice 6

Les deux questions sont indépendantes :

1) Trouver un nombre de trois chiffres qui soit un carré parfait divisible par 56.
2) Trouver tous les diviseurs de 84, puis résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x(x+1)(2x+1) = 84$

Exercice 7

Le produit de deux entiers naturels a et b ($a < b$) est 11 340. On note d leur pgcd.

1) a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?
   b) Pourquoi $d = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 2$?
2) On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.
   a) Démontrer que $d = 18$.
   b) En déduire a et b.

Exercice 8

α et β sont deux naturels et $n = 2^\alpha 3^\beta$.
Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
2) En déduire n

Exercice 9

Un entier n a 5 diviseurs et $n - 16$ est le produit de deux nombres premiers.

1) Prouver que $n = p^4$, avec p premier.
2) Écrire $n - 16$ sous forme d'un produit de trois facteurs dépendant de p.
3) En déduire la valeur de n

Exercice 10

Un détaillant de matériel audiovisuel effectue trois remises successives sur un article qui coûtait 300 € et qu'il vend 222,87 €.
Quels sont les pourcentages (nombres entiers) des trois remises ?

Exercice 11

Triplets pythagoriciens

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x; y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$(E) \quad x^2 + y^2 = p^2$$

1) On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.
2) On suppose désormais que $p \neq 2$ et que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E).
   Le but des questions suivantes est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
   a) Montrer que x et y sont de parités différentes.

b) Montrer que x et y ne sont pas divisible par p.

c) En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3) On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est à dire que :

$$p = u^2 + v^2 \qquad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont deux entiers naturels strictement positifs.}$$

a) Vérifier que le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| \ , \ 2uv\right)$ est solution de (E).

b) Donner une solution de l'équation (E) lorsque que $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4) On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas la somme de deux carrés.

a) $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils la somme de deux carrés ?

b) Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solutions en entiers strictement positifs.

EXERCICE 12

Théorème d'Euclide

On appelle nombre parfait un nombre dont la somme des diviseurs stricts est égal à lui-même.

1) **Exemples** : Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombre parfait : « Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1} - 1)$ est si $2^{n+1} - 1$ est premier, alors a est parfait ».
Trouver alors les quatre premiers nombres parfaits.

2) **Démonstration**. On pose $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ et supposons que $2^{n+1} - 1$ est premier.

a) Quelle est la décomposition de a en facteurs premiers ?

b) En déduire la liste des diviseurs de a.

c) Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts est égale à ce nombre a.

⚠ Le problème de savoir s'il existe des nombres parfaits impairs n'est toujours pas résolu.

Divisibilité et nombres premiers

EXERCICE 13

Montrer que si 17 divise n^{100} et $n \geqslant 2$ alors le quotient $q = \dfrac{n^{100}}{17}$ est divisible par 17^{99}

EXERCICE 14

Rep-unit

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? »
Pour tout entier naturel p , $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^1 + 1$.

1) Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1\,111$ sont-ils premiers ?

2) Prouvez que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

3) On se propose de démontrer que si p n'est pas premier alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n non nul :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

a) On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrez que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b) On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrez que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c) On suppose p entier non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduire que N_p est divisible par N_k.

d) Énoncez une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante ?

Exercice 15

Vrai - Faux

1) Soit n un entier naturel supérieur à 5.
Proposition 1 : $n^2 - 3n - 10$ n'est jamais un nombre premier

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Proposition 2 : Pour tout entier k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas premier.