# Algorithme de la résolution par le pivot de Gauss d'un système 3x3

## 1 La méthode

### 1.1 Un exemple

Le but est d'éliminer successivement l'inconnue $x$ puis $y$.

Prenons comme exemple le système 3 x 3 suivant en numérotant les lignes :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & L_1 \\ -x + 2y - z = 2 & L_2 \\ -y + 2z = 3 & L_3 \end{cases}$$

- On divise $L_1$ par 2 ce qui donne la ligne $L'_1$
- On fait la combinaison $L_2 - (-1)L'_1$ qui donne $L'_2$
- On fait la combinaison $L_3 - 0L'_1$ qui donne $L'_3$ inchangée

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + 0z = \frac{1}{2} & L'_1 \\ 0x + \frac{3}{2}y - z = \frac{5}{2} & L'_2 \\ 0x - y + 2z = 3 & L'_3 \end{cases}$$

- On divise $L'_2$ par $\frac{3}{2}$ ce qui donne la ligne $L''_2$
- On fait la combinaison $L'_1 - \left(-\frac{1}{2}\right) L''_2$ qui donne $L''_1$
- On fait la combinaison $L'_3 - (-1)L''_2$ qui donne $L''_3$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} x + 0y - \frac{1}{3}z = \frac{4}{3} & L''_1 \\ 0x + y - \frac{2}{3}z = \frac{5}{3} & L''_2 \\ 0x + 0y + \frac{4}{3}z = \frac{14}{3} & L''_3 \end{cases}$$

- On divise $L_3''$ par $\frac{4}{3}$ ce qui donne la ligne $L_3'''$
- On fait la combinaison $L_1'' - \left(-\frac{1}{3}\right) L_3'''$ qui donne $L_1'''$
- On fait la combinaison $L_2'' - \left(-\frac{2}{3}\right) L_3'''$ qui donne $L_2'''$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} x + 0y + 0z = \frac{5}{2} & L_1''' \\ 0x + y + 0z = 4 & L_2''' \\ 0x + 0y + z = \frac{7}{2} & L_3''' \end{cases}$$

On obtient alors comme solution $\left(\frac{5}{2}\,;\,4\,;\,\frac{7}{2}\right)$

## 1.2 Un exercice

Par la même méthode, résoudre $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 & L_1 \\ 5x + 6y + 7z = 8 & L_2 \\ 9x + 10y + 9z = 8 & L_3 \end{cases}$

On trouve alors comme solution : $(0\,;-1\,;\,2)$

## 1.3 Le cas général

Soit le système $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

On forme alors la matrice $(3 \times 4)$ suivante : $\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \end{array}$

On teste les coefficients de la colonne $C_1$ :

- Si $a_{11} \neq 0$ on divise la ligne $L_1$ par $a_{11}$ sinon passe au suivant $a_{21}$,
- si $a_{21} \neq 0$ on échange la ligne $L_1$ et $L_2$ et on divise la nouvelle ligne $L_1$ par $a_{21}$ sinon on passe au suivant $a_{31}$
- si $a_{31} \neq 0$ on échange la ligne $L_1$ et $L_3$ et on divise la nouvelle ligne $L_1$ par $a_{31}$ sinon tous les coefficient de la colonne $C_1$ sont nuls, le système n'admet pas de solution unique.

On obtient alors la matrice $\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \end{array}$

On effectue alors sur les lignes $L_2$ et $L_3$, les combinaisons linéaires suivante :

- $L_2 - a_{21}L_1$ sur la ligne $L_2$
- $L_3 - a_{31}L_1$ sur la ligne $L_3$

On obtient alors la matrice $\mathbf{A} = \begin{matrix} \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{pmatrix} \end{matrix}$

On effectue alors les mêmes opérations sur les colonnes $C_2$ et $C_3$.

On obtient alors, si le système admet une solution unique, la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b'''_1 \\ 0 & 1 & 0 & b'''_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'''_3 \end{pmatrix} \quad \text{la solution est alors} \quad (b'''_1 \ ; \ b'''_2 \ ; \ b'''_3)$$

# 2 Algorithme

- On doit d'abord rentrer les coefficients du système dans la matrice [A]
- On effectue les tests sur les coefficients des colonne 1,2 et 3.
- On permute éventuellement les lignes $L_I$ et $L_J$ grâce à l'instruction sur la Ti :

  "permutLigne($[A]$ , $I$ , $J$)"
- On effectue alors les combinaisons linéaires des deux autres lignes $L_K - a_{KJ}L_J$ grâce à l'instruction Ti

  "$*$ligne+$(-[A](K,I)$ , $[A]$ , $J$ , $K)$"
- On transforme alors la 4$^e$ colonne en liste $L_1$ grâce à l'instruction Ti

  "Matr▶ liste($[A]$ , 4 , $L_1$)"
- On affiche alors la liste $L_1$ qui correspond à la solution du système.

**Variables** : $I$, $J$, $K$ entiers
$[A]$ matrice, $L_1$ liste
**Entrées et initialisation**
  Rentrer la matrice $[A]$
**Traitement**
  **pour** $J$ de 1 à 3 **faire**
    $J \to I$
    **tant que** $a_{IJ} = 0$ **faire**
      $I + 1 \to I$
      **si** $I = 4$ **alors**
        Afficher "Pas de solution unique"
        stop
      **fin**
    **fin**
    Permuter $L_I$ et $L_J$
    Diviser la ligne $J$ par $a_{JJ}$
    **pour** $K$ de 1 à 3 **faire**
      **si** $K \neq J$ **alors**
        $L_K - a_{KJ}L_J \to L_K$
      **fin**
    **fin**
  **fin**
  Transformer la colonne 4 en liste $L_1$
**Sorties** : Afficher $L_1$

**Remarque** : On peut éventuellement avoir la solution du système en fraction en remplaçant la dernière ligne du programme par :
Disp $L_1(1)$ ▶Frac, $L_1(2)$ ▶Frac, $L_1(3)$ ▶Frac

On teste le programme avec les deux exemples.

On peut éventuellement inverser la 1re et la 3e ligne au premier exemple pour tester si le programme permute bien les lignes :

$$\begin{cases} -y+2z=3 \\ 2x-y=1 \\ -x+2y-z=2 \end{cases}$$

On trouve alors : { 2.5 4 3.5 }

On peut aussi tester le programme avec un système qui n'admet pas de solution unique, par exemple le système :

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x-y+z=5 \\ 2x+y+4z=9 \end{cases}$$

On remarquera que l'on a ajouté l'instruction "stop", sinon le programme teste $a_{4J}=0$ et se met alors en erreur de dimension car la matrice **A** n'a pas 4 lignes.