Correction autre exercice

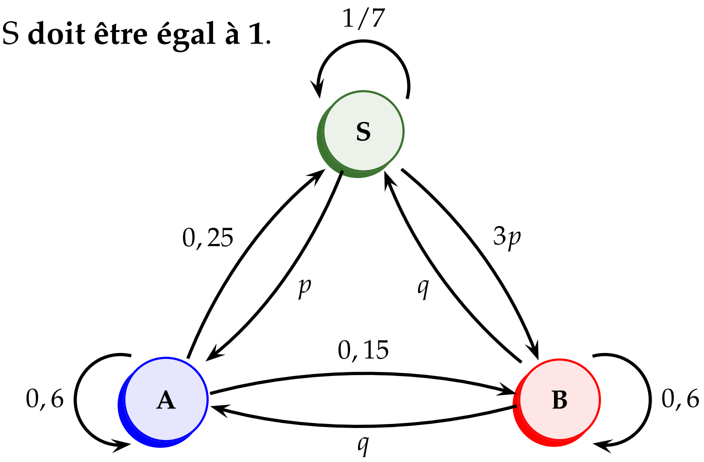
EXERCICE 1

Amérique du Sud novembre 2017

On a un système fermé à trois éventualités car les joueur ne peuvent se retirer du jeu et aucun autre joueur ne peut rentrer en cours de route. On peut alors faire un graphe probabiliste.

Tout ce qui **sort** d'une catégorie, A, B ou S **doit être égal à 1**.

En conséquence pour B :
$0,6+2q=1 \quad \Leftrightarrow \quad q=0,2$



1) Pour S :

$$p+3p+\frac{1}{7}=1 \quad \Leftrightarrow \quad 4p=\frac{6}{7}$$

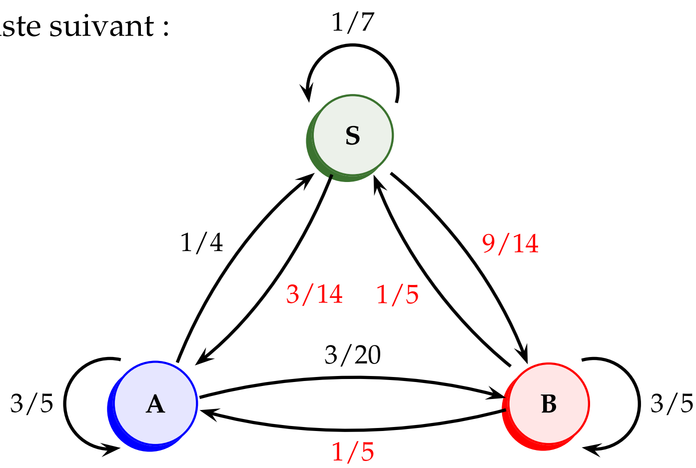
$$\Leftrightarrow \quad p=\frac{3}{14}$$

2) a) On obtient alors le graphe probabiliste suivant :

Si l'on met tous les coefficients en fraction on trouve :

$0,25=\frac{1}{4}, \; 0,15=\frac{3}{20}$

$0,6=\frac{3}{5}, \; 0,2=\frac{1}{5}$



Pour établir le système passant de l'état n à l'état $(n+1)$, on prend tout ce qui **rentre** d'une catégorie.

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+\frac{1}{5}b_n+\frac{3}{14}c_n \\ b_{n+1}=\frac{3}{20}a_n+\frac{3}{5}b_n+\frac{9}{14}c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{5}b_n+\frac{1}{7}c_n \end{cases}$$

On obtient la matrice de transition

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice de transition, du fait que l'on a pris une matrice ligne pour $\mathbf{U}_n$ ce qui donne la relation $\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{U}_n\mathbf{T}$, les coefficients de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} se retrouve sur les colonnes et la somme de coefficients d'une ligne vaut à 1.

2) b) Comme la question est explicite, on fait une récurrence pour établir la relation entre $\mathbf{U}_n$ et $\mathbf{U}_0$.

Initialisation : $n = 0$, $\mathbf{U}_0\mathbf{T}^0 = \mathbf{U}_0\mathbf{I}_3 = \mathbf{U}_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_0\mathbf{T}^n$, montrons $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_0\mathbf{T}^{n+1}$.

HR : $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_0\mathbf{T}^n \overset{\times\mathbf{T}\text{ à droite}}{\Rightarrow} \mathbf{U}_n\mathbf{T} = \mathbf{U}_0\mathbf{T}^n\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_0\mathbf{T}^{n+1}$.
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_0\mathbf{T}^{n+1}$

c) Au début tous les joueurs sont solitaires donc : $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\mathbf{U}_7 = \mathbf{U}_0\mathbf{T}^7 = \begin{pmatrix}0,388 & 0,457 & 0,205\end{pmatrix}$

3) a) On vérifie avec la calculatrice que : $\mathbf{VT} = \mathbf{V}$.

La matrice $\mathbf{V}$ est invariante à droite avec la matrice $\mathbf{T}$.

b) On cherche l'état stable avec la la matrice $\mathbf{T}$, c'est à dire que l'on cherche la matrice $\mathbf{C}$ probabiliste qui est invariante à droite avec la matrice $\mathbf{T}$. Il faut donc rendre $\mathbf{V}$ probabiliste, c'est à dire que la somme des coefficients doivent être égale à 1.

On pose alors : $\mathbf{C} = \dfrac{1}{300+405+182}\mathbf{V} = \dfrac{1}{887}\mathbf{V}$.

La matrice $\mathbf{C}$ est bien invariante par $\mathbf{T}$: $\mathbf{CT} = \dfrac{1}{887}\mathbf{VT} = \dfrac{1}{887}\mathbf{V} = \mathbf{C}$

Au millième, on trouve : $\mathbf{C} = \begin{pmatrix}\dfrac{300}{887} & \dfrac{405}{887} & \dfrac{182}{887}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,338 & 0,457 & 0,205\end{pmatrix}$.

Au bout d'un semaine, on a quasiment atteint l'état stable.

4) La valeur qu'affiche l'algorithme est le coefficient $a_7 = 0,338$ au millième.

Il faut modifier deux lignes :

pour k allant de 1 à 7 **faire** $\longrightarrow$ **pour** k allant de 1 à 13 **faire**

Afficher $\mathbf{U}(1) \longrightarrow$ Afficher $\mathbf{U}(3)$