

Révision du 06 juin 2019

EXERCICE 1

Amérique du Nord 2019

Toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients entiers.

Deux matrices $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5 si et seulement si $\begin{cases} x \equiv x' [5] \\ y \equiv y' [5] \end{cases}$.

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5 si et seulement si $\begin{cases} a \equiv a' [5] \\ b \equiv b' [5] \\ c \equiv c' [5] \\ d \equiv d' [5] \end{cases}$.

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

- Ils choisissent $\mathbf{M}$ carrée d'ordre 2, à coefficients entiers.

- Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.

- Chaque lettre est remplacée par une matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ déduite du tableau ci-contre :
 x est le numéro de la colonne et y celui de la ligne;

par exemple, la lettre T correspond $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- On calcule $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à gauche par la matrice $\mathbf{M}$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$\mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.

- On utilise le tableau pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

1) Bob et Alice choisissent la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

b) On pose $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que les matrices $\mathbf{PM}$ et $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

c) On considère $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ deux matrices d'ordre 2 congrues modulo 5 et

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{Z}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ deux matrices colonnes congrues modulo 5.}$$

Montrer alors que les matrices $\mathbf{AZ}$ et $\mathbf{A'Z'}$ sont congrues modulo 5.

Dans ce qui suit on admet que si $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ sont deux matrices carrées d'ordre 2 congrues modulo 5 et si $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ sont deux matrices carrées d'ordre 2 congrues modulo 5 alors les matrices produit $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{A'B'}$ sont congrues modulo 5.

d) On note $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes.

Déduire des questions précédentes que si $\mathbf{MX}$ et $\mathbf{Y}$ sont congrues modulo 5 alors les matrices $\mathbf{X}$ et $\mathbf{PY}$ sont congrues modulo 5; ce qui permet de « dé-coder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice $\mathbf{M}$ choisie.

e) Décoder alors la lettre « D ».

2) On souhaite déterminer si la matrice $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.

a) On pose $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Vérifier que la matrice $\mathbf{RS}$ et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

b) On admet qu'un message codé par la matrice $\mathbf{R}$ peut être décodé s'il existe une matrice $\mathbf{T}$ telle que les matrices $\mathbf{TR}$ et $\mathbf{I}$ soient congrues modulo 5.

Montrer que si c'est le cas alors les matrices $\mathbf{TRS}$ et $\mathbf{S}$ sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question 1d pour le codage avec la matrice $\mathbf{M}$).

c) En déduire qu'un message codé par la matrice $\mathbf{R}$ ne peut être décodé.

EXERCICE 2

Liban 2019

Dans un jardin public, un artiste doit installer une œuvre aquatique commandée par la mairie. Cette œuvre sera constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.

Au départ, les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.

Un système de canalisations devra alors permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R;
- ensuite, les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A;
- enfin, on rajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

Une étude de faisabilité du projet amène à étudier la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

On modélise les quantités d'eau des deux bassins A et B à l'aide de deux suites (a_n) et (b_n) : plus précisément pour tout entier naturel n , on note a_n et b_n les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose pour cette étude mathématique que les bassins sont a priori suffisamment grands pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{U}_n$ la matrice colonne $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{U}_n + \mathbf{C}$ où $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) On considère la matrice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calculer $\mathbf{P}^2$. En déduire que la matrice $\mathbf{P}$ est inversible et préciser sa matrice inverse.
- Montrer que $\mathbf{PMP}$ est une matrice diagonale $\mathbf{D}$ que l'on précisera.
- Calculer $\mathbf{PDP}$.
- Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}$.

On admet par la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$.

3) Montrer que la matrice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{C}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $\mathbf{V}_n$ par $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{X}$.

a) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{MV}_n$.

b) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{V}_0$.

Montrer que : $\forall n$, $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$.

5) a) Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.

b) Déterminer la limite de la suite (a_n) .

c) On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour la faisabilité du projet, c'est-à-dire pour éviter tout débordement.