Révisions : arithmétique

Exercice 1

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a est un entier naturel
	b est un entier naturel
	c est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à c la valeur 0
	Demander la valeur de a
	Demander la valeur de b
Traitement :	Tant que $a > b$
	Affecter à c la valeur $c+1$
	Affecter à a la valeur $a-b$
	Fin de tant que
Sortie :	Afficher c
	Afficher a

1) Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2) Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1) Coder la lettre U.
2) Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1) Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.

2) Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \quad [26] \iff m = 3p - 15 \quad [26].$$

3) Décoder alors la lettre B.

Exercice 2

Partie A
On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1) Donner une solution particulière de l'équation (E)
2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B
Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1) On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2) On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   a) Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c) En déduire que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
   d) Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3) Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Exercice 3

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.
2) Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :
$$\text{pgcd}(a\ ;\ b) = \text{pgcd}(bc - a\ ;\ b).$$
3) Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :
$$\text{pgcd}\left(3n^3 - 11n\ ;\ n + 3\right) = \text{pgcd}(48\ ;\ n + 3).$$
4) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
   b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel.