Correction de l'exercice 3

Exercice 3

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2) Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :
$$\text{pgcd}(a\,;\,b) = \text{pgcd}(bc - a\,;\,b).$$

3) Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :
$$\text{pgcd}\left(3n^3 - 11n\,;\,n + 3\right) = \text{pgcd}(48\,;\,n + 3).$$

4) a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

   b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel.

Correction

1) On effectue la division euclidienne de $3n^3 - 11n + 48$ par $n + 3$. On trouve alors :
$$3n^3 - 11n + 48 = (n + 3)(3x^2 - 9n + 16)$$

2) On sait que $3n^2 - 9n + 16$ est un entier relatif, montrons que c'est un entier naturel.
   Soit P le polynôme de variable x réel défini par : $P(x) = 3x^2 - 9x + 16$.
   Calculons le discriminant de P : $\Delta = 81 - 192 = -111$.
   Comme $\Delta < 0$ le polynôme a un signe constant sur $\mathbb{R}$ et du signe du coefficient devant x^2. P est donc positif sur $\mathbb{R}$. P est donc positif sur $\mathbb{N}$.

   Le nombre $3n^2 - 9n + 16$ est donc un entier naturel.

3) Montrons que : $\text{pgcd}(a\,;\,b) = \text{pgcd}(bc - a\,;\,b)$

   On pose $\text{D} = \text{pgcd}(a, b)$ et $\text{d} = \text{pgcd}(bc - a, b)$.
   - D divise a et b donc il divise toute combinaison linéaire de a et b donc $-a + cb$, donc D divise $bc - a$ et b. On a alors $\text{D} \leqslant \text{d}$ (1).
   - d divise $bc - a$ et b donc il divise toute combinaison linéaire de $bc - a$ et b donc $-(bc - a) + cb = a$, donc d divise a et b. On a alors $\text{d} \leqslant \text{D}$ (2).

   De (1) et (2), on a : $\text{D} = \text{d}$

4) On applique l'égalité du 2) aux nombres suivants :
$$a = 48 \quad b = n + 3 \quad \text{et} \quad c = 3n^2 - 9n + 16$$
   On a alors : $bc - a = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16) - 48 = 3n^3 - 11n$

   On en déduit alors : $\text{pgcd}(3n^3 - 11n\ ,\ n + 3) = \text{pgcd}(48, n + 3)$

5) a) Les diviseurs de 48 sont : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$

b) On veut que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

Il faut alors que $3n^3 - 11n$ soit un multiple de $n+3$. On a alors :

$$\text{pgcd}(3n^3 - 11n \ , \ n+3) = n+3$$

De la relation du 3), on en déduit que : $\text{pgcd}(48, n+3) = n+3$.

$n+3$ est donc un diviseur de 48. On ne retient que les diviseurs supérieurs ou égaux à 3. On obtient le tableau solution suivant :

$n+3$	3	4	6	8	12	16	24	48
n	0	1	3	5	9	13	21	45