Révision du 20 mai 2014 : pgcd - Bezout - Gauss

EXERCICE 1

Soit n un entier relatif supérieur ou égal à 2.
On pose $a = n + 3$ et $b = 2n + 1$

a) Calculer $(2a - b)$, en déduire les valeurs possibles de $d = PGCD(a; b)$

b) Montrer que $PGCD(a; b) = PGCD(n - 2; 5)$.

c) Démontrer que a et b sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.

EXERCICE 2

Vrai - Faux

Pour chacune des 4 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Proposition 2 : L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples de la forme $(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3 : Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et $4n + 3$ est égal à 7.

Proposition 4 : S'il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2.

Proposition 5 : Soit l'équation (E) : $x^2 - 52x + 480 = 0$. Il existe deux entiers naturels non nuls dont le pgcd et le ppcm sont solution de (E).

EXERCICE 3

1) Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

   a) Montrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

$$(E) \qquad 65x - 40y = 1$$

   b) Montrer que l'équation (E') admet au moins une solution.

$$(E') \qquad 17x - 40y = 1$$

   c) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

   d) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que
   $17x_0 \equiv 1 \quad [40]$.

2) Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \quad [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 \quad [55]$, alors $b^{33} \equiv a \quad [55]$.

Exercice 4

1) Soit a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour pgcd le carré d'un nombre premier p.
   a) Montrer que p^2 divise a^2 (on pourra remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$).
   En déduire que p divise a. Montrer que p divise b.
   b) Démontrer que le pgcd de a et b est soit p soit p^2.
2) On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que : $\text{pgcd}(a+b\,;ab) = 49$ et $\text{ppcm}(a\,;b) = 231$
   a) Soit a et b deux entiers. Montrer que leur pgcd est 7.
   b) Quelles sont les solutions du problème posé.

Exercice 5

Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} x+y = 27 \\ \text{ppcm}(x\,;y) = 60 \end{cases}$