Révision du 09 juin 2016 : Arithmétique et matrices

EXERCICE 1

Liban mai 2016

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

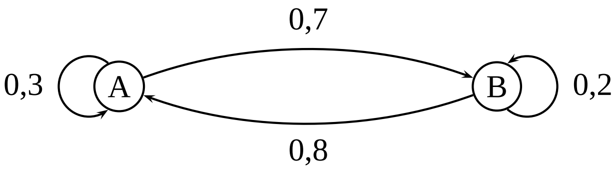
- On considère le système $\begin{cases} n \equiv 1 & [5] \\ n \equiv 3 & [4] \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

  Affirmation 1 : Si n est solution de ce système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5.

  Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système.

  Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 20k$.

- Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.
  Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables : a, b réels
Entrées et initialisation
  a prend la valeur 0
  b prend la valeur 1
Traitement
  pour k allant de 1 à 10 **faire**
    a prend la valeur $0,8a + 0,3b$
    b prend la valeur $1 - a$
  fin
Sorties : Afficher a et b

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.

Affirmation 5 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.

EXERCICE 2

Amérique du Nord juin 2016

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1) a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) \quad , \quad P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \quad \text{et} \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\,.$$

b) Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathbf{R}_n$ la matrice ligne définie par :

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

et on considère $\mathbf{M}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathbf{R}_0$ la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \times \mathbf{M}$.
Déterminer $\mathbf{R}_1$ et justifier que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{M}^n$.

3) On admet que $\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{D} \times \mathbf{P}^{-1}$ avec :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{M}^n = \mathbf{P} \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{P}^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) a) Calculer $\mathbf{D}^n \times \mathbf{P}^{-1}$ en fonction de n.

b) Sachant que $\mathbf{R}_0\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de $\mathbf{R}_n$ en fonction de n.

5) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)$.
Interpréter ces résultats.