Révision du 18 mai 2017

EXERCICE 1

Cours

1) Trouver tous les diviseurs de 96. Vérifier votre résultats en calculant le nombre de diviseurs.
2) d divise $5n+1$ et $3n-4$. Montrer que d divise 23. Valeurs possibles pour d ?
3) L'égalité $1600 = 17 \times 93 + 19$ correspond-elle à la division de 1600 par 17 ?
4) Démontrer que $2011^{2011} \equiv 2 \ \ [7]$.
5) Déterminer, par l'algorithme d'Euclide, le pgcd de 935 et 517.
6) Démontrer le théorème de Bézout : $\text{pgcd}(a,b) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \quad au + bv = 1$
7) Déterminer, en remontant l'algorithme d'Euclide, un solution à l'équation $59x + 27y = 1$. En déduire toutes les solution dans $\mathbb{N}^2$
8) Démontrer le théorème de Gauss : Si a divise bc et $\text{pgcd}(a,b) = 1$ alors, a divise c.
9) Démontrer la factorisation standard pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n+1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$$
En déduire que si n n'est pas premier, les nombres de la forme $2^n - 1$, avec $n \geqslant 2$, ne sont pas premier . La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 2

Liban juin 2016

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

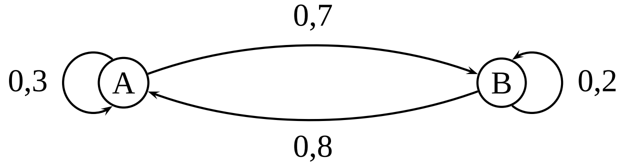
- On considère le système $\begin{cases} n \equiv 1 & [5] \\ n \equiv 3 & [4] \end{cases}$ d'inconnue n entier relatif.

  Affirmation 1 : Si n est solution du système alors $(n-11)$ est divisible par 4 et par 5.

  Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système.

  Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 20k$.

- Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.
  Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : a, b  réels  et k entier
Entrées et initialisation
    a prend la valeur 0
    b prend la valeur 1
Traitement
    pour k variant de 1 à 10 faire
        a prend la valeur  0,8a+0,3b
        b prend la valeur   1 − a
    fin
Sorties : Afficher a et b
```

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10}.

Affirmation 3 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.

EXERCICE 3

Polynésie juin 2016

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

1) **Proposition 1**
   Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de (n^2+n) n'est jamais égal à 4.

2) On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par : $u_n = \dfrac{1}{n} \times \text{pgcd}(20\,;\,n)$.
   Proposition 2 La suite (u_n) est convergente.

3) **Proposition 3**
   Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a : $A \times B = B \times A$.

4) Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
   Pour tout entier naturel n, on note :
   - A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité ».
   - B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité. »
   - $\mathbf{X}_n$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   On admet que, pour tout entier nature n, $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M} \times \mathbf{X}_n$ avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}$.

   Proposition 4
   La probabilité $P_{\text{A}_n}(\text{B}_{n+1}) = 0,45$.

   Proposition 5
   Il existe un état initial $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.

EXERCICE 4

Métropole juin 2016

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls $(a,\ b)$, on note pgcd$(a,\ b)$ le plus grand diviseur commun de a et b.
Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1) Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3}$.
   a) Montrer que si $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.
   b) Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

   Généralisation

   On considère désormais une droite Δ d'équation $(E)\ :\ y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que pgcd$(m,\ n)$ = pgcd$(p,\ q) = 1$.
   Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.
   Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2) On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $(x_0,\ y_0)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.
   a) En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np.
   b) En déduire que q divise n.

3) Réciproquement, on suppose que q divise n, et on souhaite trouver un couple $(x_0,\ y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.
   a) On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.
   b) En déduire qu'il existe un couple $(x_0,\ y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

4) Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5) On donne l'algorithme suivant :

Variables : M, N, P, Q entiers relatifs
tels que pgcd$(M, N) =$ pgcd$(P, Q) = 1$
Entrées et initialisation
| Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties
si Q divise N **alors**
X prend la valeur 0
tant que $\left(\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ et $\left(-\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ non entiers **faire**
| X prend la valeur $X + 1$
fin
si $\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ entier **alors**
| Afficher $X, \ \frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$
sinon
| Afficher $-X, \ -\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$
fin
sinon
| Afficher « Pas de solution »
fin

a) Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q, entiers relatifs non nuls tels que pgcd$(M,\ N) =$ pgcd$(P,\ Q) = 1$.

b) Que permet-il d'obtenir ?