Exo sur les transformations élémentaires

Exercice 1 :

Écriture complexe

Donner l'écriture complexe des transformations f suivantes :

1) f est la translation qui amène A d'affixe $1+i$ sur B d'affixe $-1+2i$.
2) f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $-1-i$ et de rapport -3.
3) f est la symétrie de centre Ω d'affixe $2+5i$.
4) f est la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ et de centre Ω d'affixe $1+2i$.
5) f est le quart de tour direct de centre Ω d'affixe $3-i$.

Exercice 2 :

Reconnaître une tranformation

Identifier la transformation plane d'écriture complexe $z \to z'$ et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent.

1) $z' = z + i$
2) $z' = -iz + 1$
3) $z' = 2z + 1 - i$
4) $z' = -z + 2(1-i)$
5) $z' = 3z + 2i$
6) $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$
7) $z' = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}z$
8) $z' = i(1-z)$

Exercice 3 :

Transformations élémentaires

On considère les points A, B, A' et B' (avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$ d'affixes respectives a, b, a' et b') et f l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe :

$$z' = \frac{b'-a'}{b-a}(z-a) + a'$$

1. Montrer que f transforme A en A' et B en B'.
2. Préciser la nature de f dans chacun des cas suivants :
   a) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$
   b) $A'B' = AB$
   c) $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

Exercice 4 :

Composition de transformations

1) Donner l'écriture complexe de la réflexion s d'axe (Ox), de la rotation r de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de la composée $f = r \circ s$
2) Soit A le point d'affixe $1 + i$.
   Montrer que, pour tout point M d'image $M' = f(M)$, on a :

$$OM' = OM \quad \text{et} \quad AM' = AM.$$

3) En déduire que f est la réflexion d'axe (OA)