Sections planes de surfaces

Table des matières

Le but de ce chapitre est de déterminer la section d'un plan parallèle aux axes de coordonnées et d'une surface non plane dans l'espace.

1 Rappels les équations des plans et des droites dans l'espace

1.1 Équation d'un plan dans l'espace

L'équation d'un plan dans l'espace est du type :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Définition 1 : Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan (P) dans l'espace est un vecteur dont la direction est orthogonal du plan (P). On a alors pour tous points A et B du plan (P) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$$

Si le plan (P) a pour équation : $ax + by + cz = 0$, alors un vecteur normal au plan (P) a pour coordonnées :

$$\vec{n}(a; b; c)$$

Rappel : L'équation d'un plan parallèle au plan

- (Oxy) est : $z = a$
- (Oxz) est : $y = b$
- (Oyz) est : $x = c$

1.2 Équations d'une droite

Une droite peut être déterminée par l'intersection de deux plans sécants ou par un point et un vecteur directeur.

1) Par deux plans sécants (P_1) et (P_2). Leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

$$(D) \quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & (P_1) \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 & (P_2) \end{cases}$$

Remarque : Les plans (P_1) et(P_2) étant sécants, leurs vecteurs normaux ne sont donc pas colinéaires, donc les coordonnées (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnelles

2) Droite définie par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et le vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$. Soit M un point queconque de la droite (D), on a alors :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

On obtient alors l'équation paramétrique de la droite (D) :

$$(D) \quad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

2 Équation d'une surface dans l'espace

On distingue deux types d'équations qui détermine une surface dans l'espace. L'équation est soit explicite soit implicite.

2.1 Équation explicite

On dit que l'équation est explicite si l'on peut exprimer une coordonnée en fonction des deux autres. Par exemple z en fonction de x et y, on a alors :

$$z = f(x,y)$$

Exemples :

- Un plan : $z = 2x + y$
- Un paraboloïde de révolution : $z = x^2 + y^2$
- Un paraboloïde hyperbolique (selle de cheval) : $z = xy$

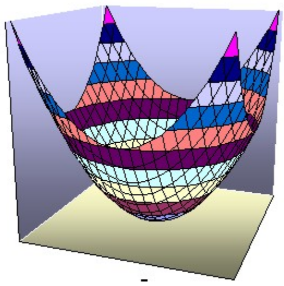


FIG. 1 – Paraboloïde de révolution

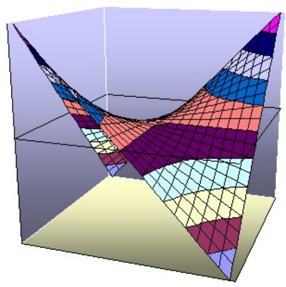


FIG. 2 – Paraboloïde hyperbolique

Remarque : Les deux dernières surfaces sont des quadriques, c'est à dire que l'équation est homogène au second degré. Ce sont surtout ces surfaces qui feront l'objet d'un problème.

2.2 Équation implicite

Lorsqu'il est plus difficile d'extraire une coordonnée en fonction des deux autres, on laisse l'équation sous la forme d'une relation entre x, y et z. On a alors :

$$f(x,y,z) = 0$$

Exemples :

- Un plan (P) : $ax + by + cz + d = 0$
- Sphère de centre O et de rayon R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- Cylindre de révolution d'axe (Oz) de rayon R : $x^2 + y^2 = R^2$
- Cône de révolution d'axe Oz et d'angle α : $(\tan^2 \alpha)\, z^2 = x^2 + y^2$

Remarque : Il est encore à noter que les trois dernières surfaces sont des quadriques.

3 Intersection d'un plan avec une sphère ou un cylindre

3.1 Avec une sphère

Soit la sphère (S) de rayon R. (S) a donc pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Du fait de la symétrie de la sphère, la section avec un plan parallèle à (Oxy), (Oxz) ou (Oyz) aura le même type de solution. Nous prendrons comme exemple un plan parallèle au plan (Oxy).

L'intersection est donc définie par le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - a^2 \\ z = a \end{cases}$$

On a alors trois cas possibles :

1) si $|a| < R$: Cercle de centre $A(0,0,a)$ et de rayon $\sqrt{R^2 - a^2}$.
2) si $|a| = R$: Point $A(0,0,a)$
3) si $|a| > R$: Aucune intersection

3.2 Avec un cylindre

Remarque : On prendra, pour l'exposé un cylindre d'axe (Oz). Pour un cylindre d'axe (Oy) ou (Ox), on fera une permutation circulaire des résultats obtenus.

Soit donc le cylindre (C) d'axe (Oz) et de rayon R. (C) a donc pour équation :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Du fait de la symétrie d'un cylindre, on distinguera deux cas.

a) **Intersection du cylindre avec le plan d'équation $z = a$.**

L'intersection est donc définie par le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = a \end{cases}$$

L'intersection est donc un cercle de rayon R et de centre $A(0,0,a)$

b) **Intersection du cylindre avec le plan d'équation $y = b$ ou $x = c$.**

L'intersection est donc défini par le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = R^2 - b^2 \\ y = b \end{cases}$$

On a alors trois cas possibles :

1) si $|b| < R$: Deux droites (génératrices du cylindre) d'équations :

$$\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - b^2} \\ y = b \\ z = t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{R^2 - b^2} \\ y = b \\ z = t \end{cases}$$

2) si $|b| = R$: Une droite (génératrice du cylindre) d'équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = b \\ z = t \end{cases}$$

3) si $|a| > R$: Aucune intersection

4 Intersection d'un plan avec un cône

Remarque : Comme pour le cylindre, on prendra pour l'exposé un cône d'axe (Oz). Pour un cône d'axe (Oy) ou (Ox), on fera une permutation circulaire des résultats obtenus.

Soit donc le cône (C) d'axe (Oz), de rayon R et d'angle α. (C) a donc pour équation :

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \quad \text{avec} \quad \lambda = \tan\alpha$$

Du fait de la symétrie du cône, on distinguera deux cas.

a) **Intersection du cône avec le plan d'équation $z = a$.**

L'intersection est donc défini par le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 a^2 \\ z = a \end{cases}$$

L'intersection est donc un cercle de rayon $|\lambda\, a|$ et de centre $A(0, 0, a)$. Ce cercle est réduit à l'origine si $a = 0$.

b) **Intersection du cône avec le plan d'équation $x = a$ ou $y = b$.**

Si l'on considère l'intersection avec le plan $x = c$, l'intersection est donc défini par le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2 \\ x = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 z^2 - y^2 = c^2 \\ x = c \end{cases}$$

Sous cette forme, on peut éventuellement déterminer la surface lorsque $c = 0$ (deux droites), cependant lorsque $c \neq 0$, on ne peut retrouver une forme connue. Pour retrouver, une forme répertoriée, on va faire un changement de repère (non orthogonal).

Soit le point $A(c, 0, 0)$ et le repère $(A, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a alors pour un point M de l'intersection :

$$\overrightarrow{AM} = y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Soit un nouveau repère $(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$[1] tel que :

$$\overrightarrow{e_1} = \lambda\vec{\jmath} + \vec{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2} = -\lambda\vec{\jmath} + \vec{k}$$

Si l'on pose (Y, Z) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans ce nouveau repère, on a donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= Y\overrightarrow{e_1} + Z\overrightarrow{e_2}\\
&= Y(\lambda\vec{\jmath} + \vec{k}) + Z(-\lambda\vec{\jmath} + \vec{k})\\
&= \lambda(Y - Z)\vec{\jmath} + (Y + Z)\vec{k}
\end{aligned}$$

On obtient donc les anciennes coordonnées en fonctions des nouvelles, soit :

$$\begin{cases} y = \lambda(Y - Z)\\ z = Y + Z \end{cases}$$

Donc l'équation $\lambda^2 z^2 - y^2 = c^2$ devient :

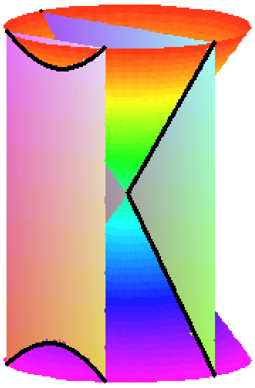
$$\begin{aligned}
\lambda^2(Y+Z)^2 - \lambda^2(Y-Z)^2 &= c\\
\lambda^2\left(Y^2 + 2YZ + Z^2 - Y^2 + 2YZ - Z^2\right) &= c\\
4\lambda^2 YZ &= c\\
Z &= \frac{c}{4\lambda^2 Y}
\end{aligned}$$

On reconnaît lorsque c n'est pas nul, une hyperbole [2] dont les asymptotes sont les axes $(A\overrightarrow{e_1})$ et $(A\overrightarrow{e_2})$.

Théorème 1 : Soit C le cône d'équation $\lambda^2 z^2 = x^2 + y^2$.

- La section du cône par le plan (Oyz) $(c = 0)$ est **la réunion des droites** définies par les axes $(A\overrightarrow{e_1})$ et $(A\overrightarrow{e_2})$.
- La section du cône par le plan $x = c$ $(c \neq 0)$ est **une hyperbole** (H) de sommet $A(c, 0, 0)$ et d'asymptotes $(A\overrightarrow{e_1})$ et $(A\overrightarrow{e_2})$.

[1]on peut vérifier aisement que $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ ne sont pas colinéaires
[2]Si $\lambda = 1$, l'hyperbole est équilatère c'est à dire que les asymptotes sont orthogonales



5 Intersection d'un plan avec un paraboloïde de révolution

Remarque : Comme pour le cylindre, on prendra pour l'exposé un paraboloïde d'axe (Oz). Pour un paraboloïde d'axe (Oy) ou (Ox), on fera une permutation circulaire des résultats obtenus.

Soit donc le paraboloïde (P) de révolution d'axe (Oz). (P) a pour équation :

$$z = x^2 + y^2$$

Du fait de la symétrie du paraboloïde, on distinguera deux cas.

a) **Intersection du paraboloïde avec le plan d'équation $z = a$.**

L'intersection est donc définie par le système :

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ z = a \end{cases}$$

On a alors trois cas possibles :

1) Si $a > 0$ l'intersection est un cercle de rayon $\sqrt{a}$ et de centre $A(0, 0, a)$.
2) Si $a = 0$ le cercle est réduit à l'origine.
3) Si $a < 0$ pas d'intersection

b) **Intersection du cylindre avec le plan d'équation $x = a$ ou $y = b$.**

Si l'on considère l'intersection avec le plan $x = c$, l'intersection est donc défini par le système :

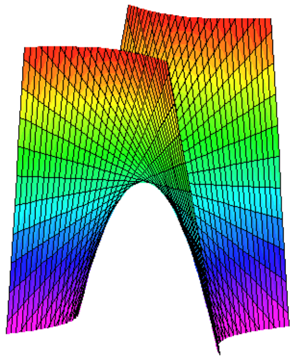
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y^2 + c^2 \\ x = c \end{cases}$$

L'intersection est donc une parabole de sommet $A(c; 0; c^2)$ et d'axe (Oz)

6 Intersection d'un plan avec un paraboloïde hyperbolique

Soit donc le paraboloïde hyperbolique (P). (P) a pour équation :

$$z = xy$$



Du fait de la symétrie du paraboloïde, on distinguera deux cas.

a) **Intersection du paraboloïde avec le plan d'équation $z = a$.**

L'intersection est donc défini par le système :

$$\begin{cases} z = xy \\ z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = a \\ z = a \end{cases}$$

On a alors deux cas possibles :

1) Si $a \neq 0$ l'équation devient :

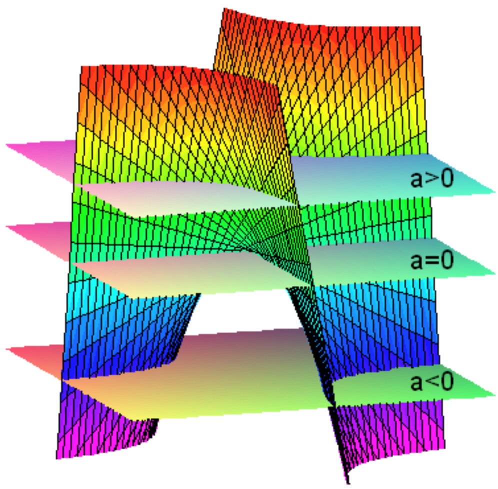
$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{x} \\ z = a \end{cases}$$

L'intersection est donc une hyperbole de sommet $A(0,0,a)$ et d'asymptote (Ax) et (Ay)

2) Si $a = 0$ l'équation devient :

$$\begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'intersection est donc l'union des axes (Oy) et (Ox)



b) **Intersection du cylindre avec le plan d'équation $x = a$ ou $y = b$.**

Si l'on considère l'intersection avec le plan $x = c$, l'intersection est donc défini par le système :

$$\begin{cases} z = xy \\ x = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = cy \\ x = c \end{cases}$$

L'intersection est donc une droite.

c) **Surface réglée.**

On appelle une surface réglée une surface engendrée par une famille de droites.

Montrons que le paraboloïde hyperbolique (P) précédent est une surface réglée. On considère alors la famille de droites (D_λ) :

$$(D_\lambda) \quad \begin{cases} z = \lambda\, y \\ x = \lambda \end{cases}$$

En effet tout point M de (P) est de la forme $M(x; y; xy)$, donc il existe $\lambda = x$ tel que $M \in (D_\lambda)$

Réciproquement pour tout point M appartenant à la famille de droites (D_λ), il existe $x = \lambda$ tel que $M \in (P)$.

On a donc : $(P) = \{(D_\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Remarque : On peut donner comme autres surfaces réglées :

➪ Les cylindres (la famille des droites sont les génératrices)

➪ Les cônes (la famille de droites sont les génératrices)

➪ Les hyperboloïdes à une nappe (forme de château d'eau)